Линейные неравенства

Ермолаев Ю.Б.

сентябрь - декабрь 2003г.

Линейные неравенства

Содержание.

1. Выпуклые конусы.
2. Теорема о разделяющей гиперплоскости.
3. Конечные конусы.
4. Множество решений системы линейных однородных неравенств.
5. Заостренные конусы. Крайние векторы и решения.
6. Выпуклые множества и многогранники.
7. Множество решений системы линейных неравенств произвольного вида.

1. Выпуклые конусы.

— Выпуклый конус в линейном пространстве $\mathbb{R}^m$ — подмножество замкнутое относительно сложения и умножения на неотрицательное число (из $\mathbb{R}$).

— Примеры:

1^o Подпространство,

2^o Ортанты $P = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, x \geqslant 0\}$ (неотрицательный ортант) и $N = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, x \leqslant 0\}$ (неположительный ортант), положительный ортант с нулем ($\widetilde{P} \cup 0$).

3^o $(b) = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, x = \lambda b,\ \lambda \geqslant 0\}$ — полупрямая,

4^o $(b)^* = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, xb \leqslant 0\}$ — полупространство,

5^o $C = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, xA \leqslant 0\}$ — множество решений системы линейных неравенств (A — произвольная матрица $m \times n$),

6^o $C^* = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, y = Ax,\ x \geqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, y = \sum_{j=1}^n \lambda_j a^j,\ \lambda_j \geqslant 0\}$ — сумма полупрямых (двойственный к C конус).

— Операции над конусами:

1) сложение: $C_1 + C_2 = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, x = x_1 + x_2,\ x_i \in C_i\}$,

2) пересечение: $C_1 \cap C_2$,

3) двойственный к C конус $C^* = \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, xy \leqslant 0 \quad \forall x \in C\}$.

— Примеры: Двойственные конусы в примерах 1^o – 6^o (двойственность C и C^* (из 5^o и 6^o) будет доказана ниже).

— Основные свойства операций:

1) $C_1 \subseteq C_2 \ \Rightarrow\ C_2^* \subseteq C_1^*$,

2) $(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$,

3) $(C_1 \cap C_2)^* \supseteq C_1^* + C_2^*$,

4) $C \subseteq C^{**}$.

Доказательствово. 1) Пусть $C_1 \subseteq C_2$. Если $y \in C_2^*$, то $xy \leqslant 0$ для всякого $x \in C_2$ в том числе и для всякого $x \in C_1$, т.е. $C_2^* \subseteq C_1^*$.

2) Пусть $y \in (C_1+C_2)^*$; тогда для любых $x_i \in C_i,\ i = 1, 2$, имеем $(x_1+x_2)y \leqslant 0$; в частности, $x_1 y \leqslant 0$ и $x_2 y \leqslant 0$, т.е. $y \in C_1^* \cap C_2^*$. Следовательно, $(C_1+C_2)^* \subseteq C_1^* \cap C_2^*$. Обратно, пусть $y \in C_1^* \cap C_2^*$, т.е. $x_i y \leqslant 0$ для $i = 1, 2$, но тогда и $(x_1 + x_2)y \leqslant 0$, т.е.

$y \in (C_1 + C_2)^*$. Следовательно, $C_1^* \cap C_2^* \subseteq (C_1 + C_2)^*$ и $(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$.

3) Если $z \in (C_1 \cap C_2)^*$, то $xz \leqslant 0$ для каждого $x \in (C_1 \cap C_2)$. В частности, если $y \in (C_1^* + C_2^*)$, т.е. $y = y_1 + y_2$, где $y_i \in C_i^*$, $(i = 1, 2)$, т.е. $x_i y_i \leqslant 0$ для всякого $x_i \in C_i$, то $xy = xy_1 + xy_2 \leqslant 0$, когда $x \in (C_1 \cap C_2)$.

4) $z \in C^{**}$ означает, что $yz \leqslant 0$ для всякого $y \in C^*$. Но по определению C^*, этим свойством обладает каждый элемент $x \in C$, т.е. $C \subseteq C^{**}$. $\square$

— Примеры. 1. C_1 — множество всех положительных векторов плоскости дополненное нулем (т.е. P без осей, но с нулем); C_2 — положительная полуось x-ов. Тогда $C_1 \cap C_2 = \{0\}$ и $(C_1 \cap C_2)^*$ — вся плоскость. С другой стороны, $C_1^* = N$, C_2^* — полуплоскость ($x \leqslant 0$) и $C_1^* + C_1^* = C_1^*$ — полуплоскость, т.е. $(C_1 \cap C_2)^* \supset C_1^* + C_1^*$ (без совпадения). 2. $C_1^{**} = P$, т.е. $C \subset C_1^{**}$ (опять без совпадения).

2. Теорема о разделяющей гиперплоскости.

— **Лемма 1.** (Альтернативная форма теоремы Кронекера-Капелли.) Пусть A — $m \times n$-матрица. Имеет место альтернатива:

1^o либо существует решение (т.е. $x \in \mathbb{R}^m$ такой, что) $xA = b$,

2^o либо существует решение (т.е. $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что) $Ay = 0, \quad by = 1$.

Доказательство. Несовместимость. Одновременное существование x и y таких, что $xA = b$ и $Ay = 0,\ by = 1$ влечет противоречивое равенство $xAy = by$, в котором $xAy = 0$ (т.к. $Ay = 0$), а $by = 1$.

Альтернативность. Если $xA = b$ не имеет решения, то по теореме Кронекера-Капелли не всякая зависимость между столбцами матрицы A переносится на строку b, т.е. существует $y' \in \mathbb{R}^n$ такой, что $Ay' = 0$, а $by' = \mu \neq 0$. Тогда $y = \frac{1}{\mu} y'$ является решением 2^o. $\square$

— **Теорема 1.** (О разделяющей гиперплоскости.) Имеет место альтернатива:

1^o либо существует решение (т.е. $x \in \mathbb{R}^m$ такой, что) $xA = b, \quad x \geqslant 0$ (1),

2^o либо существует решение (т.е. $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что) $Ay \leqslant 0, \quad by > 0$ (2).

Доказательство. Несовместимость. Если существуют одновременно x и y такие, что $xA = b, \quad x \geqslant 0$ и $Ay \leqslant 0, \quad by > 0$, то имеем противоречивое равенство $xAy = by$, в котором $xAy \leqslant 0$ (т.к. $x \geqslant 0$ и $Ay \leqslant 0$), а $by > 0$.

Альтернативность. Пусть система $xA = b, \quad x \geqslant 0$ не имеет решения. Докажем индукцией по m, что система $Ay \leqslant 0, \quad by > 0$ решение имеет.

Если система $xA = b$ не имеет вообще никакого решения, то утверждение теоремы следует из леммы 1. Поэтому будем считать, что решение x существует, но $x \leqslant 0$.

— Случай $m = 1$. $A = a_1$ — одна строка и, если $\xi a_1 = b$, то $\xi < 0$. При $y = -b$ имеем $by = -b^2 < 0$ и $a_1 y = \frac{by}{\xi} = \frac{-b^2}{\xi} > 0$, т.е. $y = -b$ есть решением системы (2).

— Общий случай. Индукция по m. Рассмотрим две вспомогательные системы. Первая вспомогательная система $x_1 A_1 = b$ (3) получается из исходной отбрасыванием одной (будем считать последней) строки в матрице A. Если система (3) имеет неотрицатель- ное решение x_1, то $(x_1, 0)$ будет неотрицательным решением системы (1). Поэтому (3) неотрицательного решения не имеет и по предположению индукции существует y_1 такой, что $A_1 y_1 \leqslant 0$, а $by_1 > 0$. Если при этом $a_m y_1 \leqslant 0$, то y_1 — искомое решение (2). Поэтому будем считать, что $a_m y_1 > 0$.

Вторая вспомогательная система $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \overline{\xi}_i \overline{a}_i = \overline{b}$ (4), где

$\overline{a}_i = -(a_m y_1) a_i + (a_i y_1) a_m,\ i = 1, ..., m-1$,

$\overline{b} = -(a_m y_1) b + (b y_1) a_m$.

Система (4) тоже не имеет неотрицательного решения. Действительно, заменяя в (4) $\overline{a}_i$ и $\overline{b}$ по их определению, получим

$$\sum_{i=1}^{m-1} \overline{\xi}_i a_i - \frac{1}{a_m y_1} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \overline{\xi}_i (a_i y_i) - b y_1 \right] a_m = b,$$

т.е. (1) имеет неотрицательное решение $x_i = \overline{\xi}_i,\ i = 1, ..., m-1,\ x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \overline{\xi}_i (a_i y_i) - b y_1$. Применяя индукционное предположение к уравнению (4), получим вектор $\overline{y}$, для которого $\overline{a}_i \overline{y} \geqslant 0,\ i = 1, ..., m-1$ и $\overline{b}\overline{y} < 0$. Теперь положим $y = (a_m \overline{y}) y_i - (a_m y_1) \overline{y}$. Тогда $a_i y = \overline{a}_i \overline{y} \geqslant 0$ для $i = 1, ..., m-1$, $by = \overline{b}\overline{y} < 0$ и $a_m y = 0$ (непосредственная проверка), т.е. y — решение системы (2). $\square$

3. Конечные конусы.

— Конечный конус — неотрицательная линейная оболочка конечного множества (порожден конечным числом) векторов, т.е. $C = (a_1) + \cdots + (a_n)$ — конечная сумма полупрямых, или $C = \{ y \in \mathbb{R}^m \,|\, y = Ax,\ x \geqslant 0 \} = AP$ — гомоморфный образ неотрицательного ортанта.

— Л1. Линеное подпространство есть конечный конус.

Доказательствово. Если $u_1, ..., u_k$ — базис подпространства L, то $L = (u_1) + \cdots + (u_k) + (-u_1) + \cdots + (-u_k)$ (или $L = (u_0) + (u_1) + \cdots + (u_k)$, где $u_0 = -u_1 - \cdots - u_k$; действительно, пусть $x = \xi_1 u_1 + \cdots + \xi_k u_k$, тогда $x = \eta_0 u_0 + \eta_1 u_1 + \cdots + \eta_k u_k$, где $\xi_i = \eta_i - \eta_0$, т.е. $\eta_i = \eta_0 + \xi_i \geqslant 0$, если $\eta_0 > 0$ выбрать достатосно большим).

— П2. (Теорема двойственности.) Если C — конечный конус, то $C^{**} = C$.

Доказательствово. Уже было доказано: что $C^{**} \supseteq C$. $C = PA$. Пусть $b \notin C$, т.е. $xA = b, \quad x \geqslant 0$ не имеет решения. По теореме 1 имеем решение $Ay \leqslant 0, \quad by > 0$. Это означает, что $b \notin C^{**}$. $\square$

— **С1.** Пусть $C = \{ x \in \mathbb{R}^m \,|\, xA \leqslant 0 \}$; тогда $C^* = AP = \{ y \in \mathbb{R}^m \,|\, y = Ax,\ x \geqslant 0 \}$.

Доказательствово. Пусть $K = \{ y \in \mathbb{R}^m \,|\, y = Ax,\ x \geqslant 0 \}$; тогда $K^* = C \ \Rightarrow K^{**} = K = C^*$. $\square$

4. Множество решений системы линейных однородных неравенств.

— Зависимость решения уравнения $xA = b\ (b \neq 0)$ от системы строк $a_{i_1}, ..., a_{i_k}$. Это уравнение можно запивать в виде $\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_m a_m = b$. Решение $(\xi_1^o, ..., \xi_m^o)$ зависит от строк $a_{i_1}, ..., a_{i_k}$, если $\xi_j^o = 0$, для всякого $j \notin \{ i_1, ..., i_k \}$.

— Базисное решение — зависящее от линейно независимой системы строк.

— П1. Если $xA = b$ $(b \neq 0)$ имеет неотрицательное решение, то оно имеет и базисное неотрицательное решение.

Доказательство. Индукция по m. Можно считать, что x зависит от всех $a_1, ..., a_m$ и что $a_1, ..., a_m$ линейно зависимы. Вектор коэффициентов этой зависимости и данное решение позволяют скомбинировать новое неотрицательное решение, которое будет зависить от меньшего, чем m строк и потому можно применить индукционное предполджение. □

— П2. Множество неотрицательных решений $xA = 0$ есть конечный конус.

Доказательство. $xA = 0 \Leftrightarrow \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_m a_m = 0$ (1), где $x = (\xi_1, ..., \xi_m)$. Рассмотрим систему $\xi_1 \widehat{a}_1 + \cdots + \xi_m \widehat{a}_m = e_{n+1}$ (2), где $\widehat{a}_i = (a_i, 1)$, а $e_{n+1} = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (т.е. добавим к (1): $\xi_1 + \cdots + \xi_m = 1$, $\xi_i \geqslant 0$). Каждое решение (1) отличается от решения (2) разве лишь числовым множителем. Следовательно, из конечной порож- денности множества решений системы (2) следует конечная порожденность множества решений системы (1). Поэтому утверждение П2 вытекает из следующей леммы. □

— **Л1.** Всякое неотрицательное решение системы (2) есть неотрицательная линейная комбинация базисных неотрицательных решений.

Доказательство. Применим к решениям (2) индукцию по числу строк, от которых зависит данное решение. Можем считать, что оно зависит от всех m строк. Если $\widehat{a}_1, ..., \widehat{a}_m$ линейно независимы, то данное решение само базисное. Если же зависимые, то по П1 существует базисное неотрица- тельное решение $x^o = (\xi_1^o, ..., \xi_m^o)$, у которого хотя бы одно $\xi_i^o = 0$ (иначе оно не было бы базисным). Пусть для определенности $\xi_1^o = 0$. Подберем $\mu, \nu > 0$ так, чтобы $x' = \mu x - \nu x^o$ тоже было неотрицательным решением системы (2), но зависящем от меньшего, чем m числа строк. Для этого нужно иметь 1^o $\xi_i' = \mu\xi_i - \nu\xi_i^o \geqslant 0$ для каждого $i = 1, ..., m$, 2^o хотя бы для одного значения j строгое равенство $\xi_j' = \mu\xi_j - \nu\xi_j^o = 0$ и 3^o $\xi_1' + \cdots + \xi_m' = 1$. Для выполнения первых двух условий нужно положить $\mu\xi_i \geqslant \nu\xi_i^o$, $\theta = \mu/\nu \geqslant \xi_i^o/\xi_i$, где $\theta = \max\{\xi_i^o/\xi_i\}$. А последнее дает $\sum\limits_{i=1}^{m}(\mu\xi_i - \nu\xi_i^o) = 1$, т.е. $\mu - \nu = 1$ (т.к. $\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i = \sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i^o = 1$). Из двух равенств $\theta = \mu/\nu$ и $\mu - \nu = 1$ имеем $\mu = \theta/(\theta - 1)$, $\nu = 1/(\theta - 1)$. Остается убедиться, что $\theta > 1$. Дествительно, т.к. $\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i = \sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i^o = 1$ и число ненулевых слагаемых в первой сумме больше, чем во второй, то должен найтись хотя бы один индекс k, для которого $\xi_i^o > \xi_i$, а значит $\max\{\xi_i^o/\xi_i\} > 1$. Таким образом, имеем $\mu\xi_i = \nu\xi_i^o + \xi_i'$ для всех $i = 1, ..., m$. Отсюда $x = 1/\theta x^o + (\theta - 1)/\theta x'$. Здесь правая часть есть неотрицательная линейная комбинация неотрицательных базисных решений (2), т.к. x^o — базисное решение по построению, а x' — неотрицательная линейная комбинация неотрицательных базисных решений по предположению индукции. □

— С1. Если L — подпространство, то $L \cap P$ — конечный конус.

Док-во. Всякое подпространство L есть множество решений некоторой системы $xA = 0$, а множество неотрицательных решений этой системы есть $L \cap P$. $\square$

— **Теорема 2.** Множество решений неравенства $xA \leqslant 0$ — конечный конус.

Доказательство. Пусть C — множество решений системы $xA \leqslant 0$. Определим $L = \mathbb{R}^m A = \{y \,|\, y = xA,\ x \in \mathbb{R}^m\}$ и $L \cap N = (y_1) + \cdots + (y_k)$ (по С1.). Положим $y_i = x_i A,\ i = 1, ..., k$ и $C_1 = (x_1) + \cdots + (x_k)$; C_2 — подпространство решений уравнения $xA = 0$. Тогда $C = C_1 + C_2$. Действмтельно, пусть $\widetilde{x}A \leqslant 0$, тогда $\widetilde{y} = \widetilde{x}A \in L \cap N$ и $\widetilde{y} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i A,\ \lambda_i \geqslant 0$, отсюда $(\widetilde{x} - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i)A = 0 \ \Rightarrow\ \widetilde{x} - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i A \in C_2$.
$\square$

— **Следствие 2.** Всякий конечный конус есть множество всех решений однородного неравенства вида $xA \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть $C = (a_1) + \cdots + (a_k) = \{y \in \mathbb{R}^m | y = Ax, x \geqslant 0\}$ — конечный конус. Тогда $C^* = \{x \in \mathbb{R}^m | xA \leqslant 0\}$ — множество решений однородной системы линейных неравенств. В силу теоремы 2 последнее есть конечный конус, т.е. $C^* = \{y \in \mathbb{R}^m | y = Bx, x \geqslant 0\}$. Поэтому $C^{**} = \{x \in \mathbb{R}^m | xB \leqslant 0\} = C$, т.к. C конечный конус. $\square$

— **Теорема 3.** (Теорема о замкнутости множества конечных конусов). Если C_1 и C_2 — конечные конусы, то конечными являются также $C_1 + C_2, C_1 \cap C_2$ и C^*. При этом имеют место

i) $C_1 \subseteq C_2 \ \Rightarrow\ C_2^* \subseteq C_1^*$,

ii) $(C_1 + C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$,

iii) $(C_1 \cap C_2)^* = C_1^* + C_2^*$,

iv) $C^{**} = C$.

Доказательствово. Конечность $C_1 + C_2$ следует из определения конечности. Свойства i), ii) справедливы для любых конусов, а iv) есть утверждение теоремы двойственности. Конечность C^* следствие теоремы 2. Действительно, пусть $C = PA$ — конечный конус; тогда C^* есть множество решений неравенства $AX \leqslant 0$, которое является конечным конусом по теореме 2. Конечность $C_1 \cap C_2$ следует из только что доказанного, т.к. если C_1 и C_2 — конечные конусы, то C_1^*, C_2^* конечные конусы, и по (ii) $C_1 \cap C_2 = C_1^{**} \cap C_2^{**} = (C_1^* + C_2^*)^*$ тоже конечный конус. Наконец, $C_1^* + C_2^* = (C_1^* + C_2^*)^{**} = (C_1^{**} \cap C_2^{**})^* = (C_1 \cap C_2)^*$. $\square$

5. Заостренные конусы. Крайние векторы и решения.

— Крайний вектор x выпуклого конуса C: $x \neq x_1 + x_2$ для линейно независимых $x_1, x_2 \in C$.

— Крайнее решение системы $xA \leqslant 0$ есть крайний вектор конуса решений.

— Примеры конечных конусов без крайних векторов (пространства и полупространства, за исключением прямых и полупрямых).

— Конечный конус называывается *заостренным*, если он есть сумма своих крайних полупрямых.

— *Положительная независимость* системы векторов $a_1, ..., a_m$: $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0, \ \lambda_i \geqslant 0 \ \Rightarrow \ \lambda_i = 0, \ i = 1, ..., m$ (отсутствие подпространства (кроме нулевого) в порожденном ими конусе).

— **Лемма 1.** Конус C порожденный положительно независимой системой $a_1, ..., a_m$ заострен.

Доказательство. Пусть $a_1, ..., a_r$ — подсистема в системе образующих такая, что $C = (a_1) + \cdots + (a_r)$ и никакой из $a_1, ..., a_r$ не является неотрицательной комбинауией остальных. Докажем, что все они крайние. Если, например, a_1 крайний, то $a_1 = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r, \ \lambda_i \geqslant 0$ и, если $\lambda_1 \geqslant 0$, то $(\lambda_1 - 1)a_1 + \cdots + \lambda_r a_r = 0$ — положительная зависимость, а если $\lambda_1 < 1$, то $a_1 = \frac{1}{1-\lambda_1} a_1 + \lambda_2 a_2 \cdots + \lambda_r a_r$ — неотрицательное выражение a_1 через остальные. Оба случая противоречат предположению. $\square$

— Различие положительной зависимостии и положительного выражения: $a = e_1 + e_2$, но a, e_1, e_2 — положительно независимы, если e_1, e_2 базисные векторы на плоскости.

— **Предложение 1.** Если ранг $m \times m$-матрицы A равен m (числу неизвестных), то множество решений $xA \leqslant 0$ есть заостренный конус.

Доказательство. Пусть $C = (b_1) + \cdots + (b_k)$ — конус всех решений данного неравенства. Если $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k = 0$, где все $\lambda_i \geqslant 0$. Если, например, $\lambda_1 > 0$, то $-b_1 = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_k b_k)$. Отсюда $-b_1 A = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 b_2 A + \cdots + \lambda_k b_k A) \leqslant 0$, а т.к. кроме того $b_1 A \leqslant 0$, то $b_1 A = 0$, т.е. строки A линейно зависимы, что противоречит предположению о ранге. Следовательно, $b_1, ..., b_k$ положительно независимы и по лемме 1 C заострен. $\square$

— **Предложение 2.** Решение $\overline{x}$ системы неравенств $xA \leqslant 0$ является крайним тогда и только тогда, когда ранг системы столбцов, для которых $\overline{x} a^j = 0$, равен $m - 1$.

Доказательство. Пусть $\overline{x} a^j = 0$ для $j \in S \subset \{1, ..., n\}$ и S' — дополнение S до $\{1, ..., n\}$. Если ранг системы $a^j, \ j \in S$ равен $m-1$, то система $xa^j = 0, \ j \in S$ имеет единственное (с точностью до числового множителя) решение $\overline{x}$. А т.к. $\overline{x} = x' + x'' \ \Rightarrow \ x' a^j = 0$ и $x'' a^j = 0$ для $j \in S$, то x' x'' пропорциональны, т.е. $\overline{x}$ — крайний вектор.

С другой стороны, пусть система $a^j, \ j \in S$ имеет ранг $< m - 1$. Тогда система уравнений $xa^j = 0, \ j \in S$ имеет по крайней мере еще линейно независимое от $\overline{x}$ решение x'. При достаточно малом ε векторы $\frac{1}{2}(\overline{x} + \varepsilon x')$ и $\frac{1}{2}(\overline{x} - \varepsilon x')$, будут удовлетворять системе $xa^j < 0, \ j \in S'$, т.е. будут линейно независимыми решениями системы $xA \leqslant 0$, которые в сумме дают $\overline{x}$ и потому последний не является крайним. $\square$

— Геометрическая иллюстрация предложения 2: $\xi_1 \leqslant 0, \ \xi_2 \leqslant 0, \ \xi_3 \leqslant 0, \ \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 \leqslant 0$ ($xa_i \leqslant 0, \ i = 1, 2, 3; \ xa \leqslant 0, \ a = e_1 - e_2 + e_3$).

6. Выпуклые множества и многогранники.

— Строго говоря, в данном разделе (и следующем) $\mathbb{R}^m$ нужно рассматривать как арифметическое аффинное пространствона множестве точек которого определена операция — *выпуклая комбинация точек* $x_1, ..., x_n$: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, ..., 1$. Однако, для простоты точки отождествляются с векторами исходящими изначала $(0, ..., 0)$, концами которых эти точки являются.

— Выпуклое подмножество K в пространстве $\mathbb{R}^m$: $x_1, x_2 \in K \;\Rightarrow\; \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

— Сумма и пересечение выпуклых подмножеств есть выпуклое подмножество.

— Выпуклая комбинация точек $x_1, ..., x_k$: $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$

— Л1. X — выпукло $\Leftrightarrow$ замкнуто относительно взятия выпуклой комбинации.

— Выпуклая оболочка $\lessdot X \gtrdot$ множества X — всех выпуклых комбинаций точек из X.

— Выпуклый многогранник — выпуклая оболочка конечного множество.

— Л2. Выпуклая оболочка — выпуклое множество.

— С1. X — выпукло $\Leftrightarrow$ $X = \lessdot X \gtrdot$

— Выпуклость и центор тяжести.

— Вершина (крайняя точка) x — выпкклого множества K: $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$; $x_1, x_2 \in K$, $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \;\Rightarrow\; x = x_1 = x_2$.

— Т1. Если K — выпуклый многогранник и $\widehat{K}$ — множество его вершин, то $K = \lessdot \widehat{K} \gtrdot$.

7. Множество решений системы линейных неравенств произвольного вида.

— Лемма 1. Множество решений произвольного линейного неравенства $xA \leqslant b$ есть выпуклое множество.

— Пусть задано линейное неравенство $xA \leqslant b$ (1). Рассмотрим линейное однородное неравенство $\widetilde{x}\widetilde{A} \leqslant 0$ (2), где $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -b & -1 \end{pmatrix}$.

— Лемма 2. Вектор $(x, 1)$ является решением (2) тогда и только тогда, когда x есть решение (1).

— **Теорема 4.** Множество решений X любого неравенства $xA \leqslant b$ может быть представлено как сумма выпуклого многогранника и конечного конуса.

Доказательство. По теореме (2) множество решений системы (2) есть конечный конус. Пусть $\widetilde{X} = (\widetilde{c}_1) + \cdots + (\widetilde{c}_r) + (\widetilde{a}_1) + \cdots + (\widetilde{a}_s)$, где $\widetilde{c}_i = (c_i, 1)$, $i = 1, ..., r$ и $\widetilde{a}_i = (a_i, 0)$, $i = 1, ..., s$. Тогда $c_i A \leqslant b$, $i = 1, ..., r$; $a_i A \leqslant 0$, $i = 1, ..., s$. Пусть $K = \lessdot c_1, ..., c_r \gtrdot$ и $C = (a_1) + \cdots + (a_s)$. Имеем $X = K + C$.

В самом деле, пусть $x \in X$, тогда $(x, 1) \in \widetilde{X}$ и $(x, 1) = \lambda_1 \widetilde{c}_1 + \cdots + \lambda \widetilde{c}_r + \mu_1 \widetilde{a}_1 + \cdots + \mu_s \widetilde{a}_s = (\lambda_1 c_1, \lambda_1) + \cdots + (\lambda_r c_r, \lambda_r) + (\mu_1 a_1, 0) + \cdots + (\mu_s a_s, 0) = (\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_r c_r + \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_s a_s, \lambda_1 + \cdots + \lambda_r)$, где $\lambda_i, \mu_i \geqslant 0$. Отсюда $x = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_r c_r + \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_s a_s$

и $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$. Таким образом, $x = y + z$, где $y = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_r c_r \in K$ и $z = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_s a_s \in C = \{x | xA \leqslant 0\}$. $\square$

— **Теорема 5.** Сумма выпуклого многогранника K и конечного конуса C всегда является множеством всех решений некоторого линейного неравенства вида $xA \leqslant b$.

Доказательство. Пусть $K = \lessdot a_1, ..., a_r \gtrdot$, $C = (c_1) + \cdots + (c_s)$. Положим $\widetilde{a}_i = (a_i, 1)$, $i = 1, ..., r$, $\widetilde{c}_i = (c_i, 0)$, $i = 1, ..., s$ и рассмотрим конус $\widetilde{C} = (\widetilde{a}_1) + \cdots + (\widetilde{a}_r) + (\widetilde{c}_1) + \cdots + (\widetilde{c}_s)$. Так как всякий конечный конус есть множество всех решений однородного неравенства вида $xA \leqslant 0$, то в нашем случае $\widetilde{C}$ есть множество решений неравенства $\widetilde{x}\widetilde{A} \leqslant 0$ для некоторой матрицы $\widetilde{A}$. При этом можно считать, что последний столбец в ней имеет вид ${}^t(0, -1)$, т.е. $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -b & -1 \end{pmatrix}$. В самом деле, т.к. по построению имеем $\widetilde{x} \in \widetilde{C} \implies \widetilde{x} = (x, \xi)$, где $\xi \geqslant 0$, то добавление соответствующего неравенства не изменит множество решений. Если $\widetilde{x} \in \widetilde{C}$ и $\widetilde{x} = (x, 1)$, то $x \in K + C$. Действительно, $\widetilde{x} = \lambda_1(a_1, 1) + \cdots + \lambda_r(a_r, 1) + \mu_1(c_1, 0) + \cdots + \mu_s(c_s, 0)$, где $\lambda_i, \mu_i \geqslant 0$, т.е. $(x, 1) = (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_1 c_1 + \cdots + \mu_s c_s, \lambda_1 + \cdots + \lambda_r)$; откуда $x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_1 c_1 + \cdots + \mu_s c_s$ и $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$, т.е. $y = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r \in K$, $z = \mu_1 c_1 + \cdots + \mu_s c_s \in C$ и $x = y + z$.

Обратно, если $x \in K + C$, то $\widetilde{x} = (x, 1) \in \widetilde{C}$. В самом деле, пусть $x = y + z$, где $y = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$ и $z = \mu_1 c_1 + \cdots + \mu_s c_s$, $\mu_i \geqslant 0$; тогда имеем $(x, 1) = (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_1 c_1 + \cdots + \mu_s c_s, \lambda_1 + \cdots + \lambda_r) = \lambda_1(a_1, 1) + \cdots + \lambda_r(a_r, 1) + \mu_1(c_1, 0) + \cdots + \mu_s(c_s, 0) = \lambda_1 \widetilde{a}_1 + \cdots + \lambda_r \widetilde{a}_r + \mu_1 \widetilde{c}_1 + \cdots + \mu_s \widetilde{c}_s$. По лемме 2 x есть решение неравенства $x\widetilde{A} \leqslant b$ тогди и только тогда, когда $(x, 1) \in \widetilde{C}$. $\square$

— **Предложение 1.** Если $xA \leqslant 0$ имеет только нулевое решение, то множество решений $xA \leqslant b$ есть выпуклый многогранник.

Доказательство. Пусть $xA \leqslant 0$ имеет только нулевое решение. Тогда строки матрицы $\widetilde{A}$ линейно независимы и ее ранг равен $m + 1$ (строки A независимы, т.к. иначе $xA = 0$ (а значит и $xA \leqslant 0$) имеет ненулевое решение; кроме того, очевидно, дополнительная строка в $\widetilde{A}$ не зависит от $(A, 0)$). По предложению 1.5 множество решений $\widetilde{X}$ есть заостренный конус, т.е. сумма крайних направлений $\widetilde{X} = (\widetilde{c}_1) + \cdots + (\widetilde{c}_s)$. При этом каждое ненулевое решение системы (2) имеет последнюю координату > 0. В самом деле, пусть $\widetilde{x} = (x, \xi)$; тогда $\widetilde{x}\widetilde{A} = (xA - \xi b, -\xi) \leqslant 0$; откуда $-\xi \leqslant 0$, т.е. $\xi \geqslant 0$; пусть $\widetilde{x} = (x, 0)$ — решение (2): тогда $\widetilde{x}\widetilde{A} = (xA, 0) \leqslant 0$, откуда $xA \leqslant 0$ и, следовательно, $x = 0$ по определению. Поэтому можно считать, что $\widetilde{c}_i = (c_i, 1)$, $i = 1, ..., s$. Убедимся, что множество решений (1) в данном случае есть $C = \lessdot c_1, ..., c_s \gtrdot$. В силу леммы C лежит в множистве решений (1). Пусть $x_0 A \leqslant b$; тогда $\widetilde{x}_0 = (x_0, 1))$ есть решение (2) и потому $\widetilde{x}_0 = \lambda_{\widetilde{1}1} + \cdots + \lambda_{\widetilde{s}s}$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, ..., s$. Отсюда $x_0 = \lambda_{11} + \cdots + \lambda_{ss}$ и $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s = 1$. $\square$

— Множество X в $\mathbb{R}^m$ называется *ограниченным*, если существует $\mu \geqslant 0$ такое, что для всех $x = (\xi_i) \in X$ имеем $|\xi_i| \leqslant \mu$.

— С.1. Множество решений X неравенства $xA \leqslant b$ ограничено в том и только в том случае, когда неравенство $xA \leqslant 0$ имеет только нулевое решение.

Доказательство. Если $yA \leqslant 0$ и $y \neq 0$, то для любого x_0 такого, что $x_0 A \leqslant b$ и $\lambda > 0$ имеем $(x_0 + \lambda y)A \leqslant b$, т.е. $x_0 + \lambda y \in X$ при любом $\lambda > 0$ и потому X не может быть ограниченным. Обратное следует непосредственно из предложения 1. $\square$

Схема другого доказательства последнего утверждения: пусть множество X неограниченно; докажем, что $xA \leqslant 0$ имеет ненулевое решение. Рассмотрим последовательность решений $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(x_i = (\xi_{ij}))$ таких, что $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_i = \infty$, где $\mu_i = \max\limits_j |\xi_{ij}|$. Тогда $y_i = \frac{1}{m_i} x_i \neq 0$ и удовлетворяет неравенству $y_i A \leqslant \frac{1}{m_i} b$. Если $y_0 = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$ (существование ?), тогда, очевидно, $y_0 A \leqslant 0$ (т.к. $\frac{1}{m_i} b \to 0$). При этом $y_0 \neq 0$, т.к. у каждого y_i есть координата модуль которой равен 1. $\square$

8. Симплекс-метод для решения системы линейных неравенств.

— **Предложение 1.** (Теорема о замене.) Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — базис; $b_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \tau_{ij} a_i$, $j = 1, \ldots, n$; $T = (\tau_{ij})$. Если $\tau_{st} \neq 0$, то система $a_1, \ldots, a_{s-1}, b_t, a_{s+1}, \ldots, a_m$ — тоже базис и $b_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \tau'_{ij} a'_i$, где $a'_i = a_i$ при $i \neq s$; $a'_s = b_t$ $j = 1, \ldots, n$, то $\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\tau_{it}}{\tau_{st}} \tau_{sj}$ при $i \neq s$; $\tau'_{sj} = \frac{\tau_{sj}}{\tau_{st}}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

— Решение системы $b = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_m a_m$ ($xA = b$) процессом замещения; случай отсутствия решения (отсутствие ненулевых τ_{ij}).

— Симплекс-метод.

	a^1	a^2	...	a^m	...	a^n	c
a^1	1	0	...	0		τ_{1n}	η_1
a^2	0	1	...	0		τ_{2n}	η_2

Простая линейная модель обмена.

1. Примеры экономических моделей.

— 1) Простая линейная модель международной торговли.

— α_{ij} — часть дохода страны C_j, которая тратится на импорт из страны C_i: $C_i \xrightarrow{\alpha_{ij}} C_j$.

— 2) Простая линейная модель обмена в производстве.

— α_{ij} — количество продукта G_j потребляемое производством P_i.

Экономические линейные модели.

1) Простая линейная модель обмена. Имеется n производств (производителей) $P_1, ..., P_n$, которые производят и соответственно n продуктов $G_1, ..., G_n$, которые они производят каждый по единице продукта за единицу времени. При этом α_{ij} — потребление производителем P_i продукта G_j за ту же единицу времени. Предполагается, что модель замкнута (продукты используются только внутри и из вне не поступают). Таким образом, выполняются условия:

$\alpha_{ij} \geqslant 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$. Матрица $A = (\alpha_{ij})$, элементы которой удовлетворяют этим условиям ($A \geqslant 0, \ \sum a_i = v$) называется *матрицей обмена* (в теории вероятностей *стохастической*).

Задача: существует ли вектор цен $p = (\pi_1, ..., \pi_n) \geqslant 0$ такой, что $Ap \leqslant p$?

2. Существование равновесного вектора.

— Матрица обмена $A = (\alpha_{ij})$, где $\alpha_{ij} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1, \ j = 1, ..., n$.

— Л1. $Ap \leqslant p \ \Rightarrow \ Ap = p$.

Доказательство. $\sum \pi_i \geqslant \sum a_i p = (\sum a_i)p = vp = \sum \pi_i$. Следовательно, $\sum \pi_i = \sum (a_i p)$. $\square$

— Равновесный вектор y: $Ay = y, \ y \geqslant 0$.

— ТА. Имеет место альтернатива:

a) либо имеет решение уравнение $xA = 0, \ x \geqslant 0, \ x \neq 0$,

b) либо имеет решение неравенство $Ay > 0, \ (y \neq 0)$.

Доказательство. Несовместимость доказывается стандартно. Пусть (a) не имеет решения, тогда не имеет решения система $\sum \xi_i a_i = 0, \ \sum \xi_i = 1$.

Ранее была альтернатива (о разделяющей гиперплоскости): a) либо существует решение $xA = b, \quad x \geqslant 0$, b) либо существует решение $Ay \leqslant 0, \quad by > 0$.

По теореме о рзделяющей гиперплоскости существуют $y \in \mathbb{R}^n$ и $\eta < 0$ такие, что $a_i y + \eta \geqslant 0$ т.е. $a_i y \geqslant -\eta > 0$ для всех $i = 1, ..., m$. $\square$

— Т1. Если A — матрица обмена, то всегда существует $y \geqslant 0, \ y \neq 0$ такой, что $Ay = y$.

Доказательство. Если не существует $y \geqslant 0, \ y \neq 0$ такой, что $(E - A)y = 0$, то по ТА. существует $x \in \mathbb{R}^n$ такой что $x(E - A) > 0$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i a_i < x$. Так как A

— матрица обмена, то $\sum_{i=1}^{n} a_i = v$. Можем считать, что $\min \xi_i = \xi_n$ $(i = 1, ..., n)$. Из двух приведенных соотношений имеем $\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_n) a_i < x - \xi_n v$. В частности, $\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_n)\alpha_{in} < 0$. Но это неравенство невозможно, т.к. в его левой части стоит величина заведомо неотрицательная. Таким образом, образом предположение о несуществовании y неверно. $\square$

— Относительность цен — равновесный вектор определяется с точностью до положительного множителя.

— Независимое (относительно A) подмножество $S \subseteq \mathcal{N} = \{1, 2, ..., n\}$: $i \notin S,\ j \in S \ \Rightarrow\ \alpha_{ij} = 0$.

— Неприводимая матрица обмена. Не существует собственных независимых подмножеств.

— Последовательность индексов $i = i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_m = j$ назовем связующей, если $\alpha_{i_{k+1}, i_k} \neq 0$ для всех $k = 1, 2, ..., m-1$. — **Лемма.** Пусть $i \in \mathcal{N}$ и S — множество всех $j \in \mathcal{N}$, с которыми у i имеется связующая последовательность. Тогда S независимое подмножество.

Доказательство. В самом деле, пусть $j \notin S,\ k \in S$ и $\alpha_{jk} \neq 0$. Тогда существует связующая последовательность $i \longrightarrow k \to j$, что противоречит предположению $j \notin S$ $\square$

— **Следствие** (Признак неприводимости). Для любых двух $i, j \in \mathcal{N}$ существует связующая последовательность.

— **Лемма 2.** Если $y = (\eta_1, ..., \eta_n) \geqslant 0$ — равновесный вектор и $S = \{i \in \mathcal{N} \mid \eta_i > 0\}$, то S — независимое подмножество.

Доказательство. Для $i \notin S$ имеем $a_i y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\eta_j = \sum_{j \in S} \alpha_{ij}\eta_j = \eta_i = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_{ij} = 0$ при $i \notin S$ и всех $j \in S$. $\square$

— Т2. Если A неприводима, то ее равновесный вектор положителен и единственен.

Доказательство. Положительность. Если $y \not> 0$, то по лемме 2 A приводима.

Единственность. Пусть y, y' — два равновесных вектора матрицы A. $Ay = y,\ Ay' = y' \ \Rightarrow\ A(y - \lambda y') = (y - \lambda y')$. Подберем $\lambda > 0$ так, чтобы $y - \lambda y' \geqslant 0$ и $y - \lambda y' \not> 0$. Тогда $y - \lambda y'$ — неположительный равновесный вектор неприводимой матрицы обмена. Поэтому $y - \lambda y' = 0$. $\square$

— Неприводимое незавыисимое подмножество — не содержит собственных независимых подмножеств.

— Л3. Если S и T — независимые, то $S \cap T$ и $S \cup T$ тоже независимые.

Доказательство. Пусть $i \notin S \cap T \ \Rightarrow$ либо $i \notin S$, либо $i \notin T$; если $j \in S \cap T$, то в любом случае $\alpha_{ij} = 0$. $\square$

— С1. Различные неприводимые подмножества не пересекаются и $\mathcal{N} = S_1 \cup ... \cup S_k \cup T$, где S_i — неприводимые подмножества, а T не содержит независимых подмножеств.

— Приведение матрицы к блочному виду. Пример.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,2	0,1		0,3			
2		0,2					0,5
3		0,2	0,5		0,9		
4						0,4	
5			0,5		0,1		0,2
6	0,8			0,7		0,6	
7		0,5					0,3

	1	4	6	3	5	2	7
1	0,2	0,3	0			0,1	0
4	0	0	0,4			0	0
6	0,8	0,7	0,6			0	0
3				0,5	0,9	0,2	0
5				0,5	0,1	0	0,2
2						0,2	0,5
7						0,5	0,3

— Т3. Выражение равновесного вектора в общем случае. Пусть A — матрица обмена с неприводимыми подмножествами $S_1, ..., S_k$, а $y = (\eta_j)$ — равновесный вектор. Тогда $y = y_1 + \cdots + y_k$, где y_i — равновесный вектор, соответствующий S_i, $i = 1, ..., k$

Доказательство. Если $A_i y_i = y_i$, $i = 1, ..., k$ и $y = y_1 + \cdots + y_k$, где A_i — подматрица, соответствующая S_i, то очевидно, что $Ay = y$, т.е. y — равновесный вектор. Обратно, пусть $\mathcal{N} = S_1 \cup \cdots \cup S_k \cup T$, где S_i — неприводимые подмножества и y — равновесный вектор. Представим его в виде $y = y_1 \oplus \cdots \oplus y_k \oplus y_T$. Легко проверить, что кождый y_i здесь является равновесным вектором для A_i, $i = 1, ..., k$. Поэтому $y' = y_1 \oplus \cdots \oplus y_k$ и $y_0 = y - y'$ тоже равновесные векторы для A. По построению все координаты вектора y_0 равны нулю, кроме может быть соответствую- щих T. Если S_0 подмножество в T соответствующих ненулевым координатам y_0. По лемме 2 S_0 независимое подмножество. Если $S_0 \neq \varnothing$, то это противоречит определению T. Поэтому $S_0 = \varnothing$ и $y_0 = 0$, т.е. $y' = y$. $\square$

— С2. Если $i \in T$, то $\eta_i = 0$ в любом равновесном векторе.

— Пример. В приведенном выше примере решением является любой вектор $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, где $y_1 = (\eta_1, \eta_4, \eta_6) = (0,15; 0,4; 1)$, $y_2 = (\eta_3, \eta_5) = (1,8; 1)$

3. Динамическая теория в неприводимом случае.

— Экономическое пояснение.

— Если A матрица обмена, то и A^m матрица обмена при любом $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$. ($vA = v \Rightarrow vA^m = v$.)

— Норма на n-мерном пространстве: $|y| = \sum\limits_{j=1}^{n} |\eta_j|$, если $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$. Основные свойства: $|\lambda y| = |\lambda||y|$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) и $|y + y'| \leqslant |y| + |y'|$.

— Сходимость последовательности векторов $\{y_i\}$: $y_i \to y \Leftrightarrow |y - y_i| \to 0$.

— $Y = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y \geqslant 0, |y| = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j = 1\}$.

— **Лемма 1.** Если A — матрица обмена, то $AY \subseteq Y$. ($vA = v \quad vAy = vy = 1$.) $\square$

— Устойчивая матрица обмена: $\forall y \in Y \quad A^k y \to \overline{y}$ при $k \to \infty$.

— Для $y \in Y$ будем писать $y_k = A^k y_0$, $k = 0, 1, 2, ...$ $(y_0 = y)$.

— **Лемма 2.** Если A устойчивая, то $\overline{y}$ — равновесный вектор.

Док-во. $|A\overline{y} - \overline{y}| = |A\overline{y} - A^k y_0 + A^k y_0 - \overline{y}| \leqslant |A\overline{y} - A^k y_0| + |\overline{y} - A^k y_0| = |A\overline{y} - Ay_{k-1}| +$

$|\overline{y}-A^k y_0|<\varepsilon_1+\varepsilon_2<\varepsilon$. $\square$

— **Лемма 3.** Имеем $|Ay-\overline{y}|\leqslant|y-\overline{y}|$.

Док-во. Для $z=y-\overline{y}=(\zeta_j)$ имеем $|Ay-\overline{y}|=|A(y-\overline{y})|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\zeta_j|\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}|\zeta_j|=\sum\limits_{j=1}^{n}|\zeta_j|\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}|\zeta_j|=|y-\overline{y}|$. $\square$

— Матрица сжатия: $\exists\gamma$ $(0\leqslant\gamma<1)$ $\forall y\in Y$: $|A(y-\overline{y})|\leqslant\gamma|y-\overline{y}|$ (где $\overline{y}$ — равновесный вектор из Y).

— **Лемма 4.** Матрица сжатия устойчива.

Док-во. Имеем $|A^k y-\overline{y}|=|Ay_{k-1}-\overline{y}|\leqslant\gamma|y_{k-1}-\overline{y}|=\gamma|A^{k-1}y-\overline{y}|\leqslant\gamma^k|y-\overline{y}|$. $\square$

— **Лемма 5.** Если матрица A имеет положительную строку, то она является матрицей сжатия.

Док-во. Пусть $a_1>0$; $\overline{\gamma}=\min\{\alpha_{1j}\}$, $y,\overline{y}\in Y$; $z=y-\overline{y}=(\zeta_j)$; предположим: что $a_1 z\geqslant 0$ (в противном случае рассмотрим $z=\overline{y}-y$). Пусть $\zeta_j^+=\max\{0,\zeta_j\}$, $\zeta_j^-=\min\{\zeta_j,0\}$, $j=1,...,n$. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_j=0$ (т.к. y и $\overline{y}\in Y$), т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_j^+ +\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_j^-=0$ и, кроме того, $|z|=\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_j^+ -\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_j^-$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_j^-=-\frac{1}{2}|z|$. Имеем $|Az|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\zeta_j|=\sum\limits_{i=2}^{n}|\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\zeta_j|+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{1j}\zeta_j$ (т.к. $a_1 z\geqslant 0$) $\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}|\zeta_j|+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{1j}(\zeta_j-|\zeta_j|)=\sum\limits_{j=1}^{n}|\zeta_j|(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ij})$
$+2\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{1j}\zeta_j^-\leqslant|z|+2\overline{\gamma}\sum\limits_{j=1}^{n}\zeta_j^-=(1-\overline{\gamma})|z|$. Так как $a_1>0$, то $\overline{\gamma}>0$; если $\overline{\gamma}=1$, то $a_1=(1,1,...,1)$, и все $a_i=0$ для $i>1$. Но такая матрица обладает свойством $\forall y\in Y\quad Ay=\overline{y}=(1,0,...,0)$, т.е. $|Ay-\overline{y}|=0$. $\square$

— **Следствие 1.** Если матрица A имеет положительную строку, то она устойчива.

— **Лемма 6.** Если A^m устойчива для некоторого m, то A устойчива.

Док-во. Пусть $|A^{mk}y-\overline{y}|<\varepsilon$ при $k>N_1$; положим $N_2=N_1 m$; тогда при $k>N_2$ имеем $k=k_1 m+r$, где $k_1>N_1$ и $r<m$. Поэтому $|A^k y-\overline{y}|=|A^{k_1 m+r}y-\overline{y}|=|A^r(A^{k_1 m}y-\overline{y})|\leqslant|(A^{k_1 m}y-\overline{y})|<\varepsilon$ по лемме 3. $\square$

— **Следствие 2.** Матрица A устойчива, если для некоторого m матрица A^m имеет положительную строку.

— Пусть $A^m=(\alpha_{ij}^{(m)})$; если $\alpha_{ij}^{(r)}>0$ и $\alpha_{jk}^{(s)}>0$, то $\alpha_{ik}^{(r+s)}>0$. (1)

— **Лемма 7.** Если A неприводима, то для любых i,j существует r такое, что $\alpha_{ij}^{(r)}>0$.

Док-во. Пусть $S=\{j\in\mathcal{N}\,|\,\alpha_{1j}^{(r)}=0\,\forall r\}$, пусть $i\notin S$, а $j\in S$; тогда $\exists r\ \alpha_{1i}^{(r)}>0$; если $\alpha_{ij}>0$, то $\alpha_{1j}^{(r+1)}>0$ (см. (1)), что противоречит выбору j; следовательно, $\alpha_{ij}=0$. $\square$

— **Лемма 8.** Пусть $(q_1,...,q_r)=1$ (взаимно просты). Существует N_0 такое, что при $m>N_0$ имеем $m=\sum m_i q_i$ для некоторых $m_i\geqslant 0$.

Док-во. Индукция по r. Пусть $r = 2$, $(q_1, q_2) = 1$ и $k \geqslant N = q_1(q_2 - 1)$. Числа $k - iq_1$, $i = 0, ..., q_2 - 1$ несравнимы по модулю q_2 и потому для некоторого $0 \leqslant m_1 \leqslant q_2 - 1$ имеем $k - m_1 q_1 = m_2 q_2$.

Пусть $r > 2$, $(q_1, ..., q_r) = 1$, $(q_1, ..., q_{r-1}) = d$; тогда при $k_1 \geqslant N_1$ по предположению индукции имеем $k_1 = \sum\limits_{i+1}^{r-1} \frac{m_i q_i}{d}$. Пусть $(k_1, q_r) = 1 \implies (dk_1, q_r) = 1$ и при $k > N$ имеем $k = n_1 k_1 d + m_r q_r$. $\square$

— Периодическая матрица периода p: $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} Q_i$, $\quad Q_i \bigcap Q_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $\quad \alpha_{ij} \neq 0$, $i \in Q_r \;\Rightarrow\; j \in Q_{r+1}$ (при $r = p \quad j \in Q_1$).

— При соответствующей нумерации строк и столбцов периодическая матрица принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} & & & & A_1 \\ A_2 & & & & \\ & A_3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_p & \end{pmatrix}.$$

— **Теорема 4.** Неприводимая матрица обмена либо устойчива, либо периодична.

Док-во. Пусть $R = \{r \in \mathbb{Z}^+ \,|\, \alpha_{11}^{(r)} > 0\}$ и p — наибольший общий делитель чисел из R.

1) $p = 1$, т.е. найдутся такие $r_1, ..., r_s \in R$, что $(r_1, ..., r_s) = 1$. Пусть N_0 определено для R как в лемме 8; при $m > N_0$ имеем $\alpha_{11}^{(m)} = \alpha_{11}^{(\sum m_i r_i)} > 0$. Пусть $\alpha_{1j}^{(q_j)} > 0$ ($j = 2, ..., n$) и $q = \max\{q_j\}$. Тогда $\alpha_{1j}^{(m+q)} > 0$ для всех j, т.к. $m + q = m + q_j + q'_j$ и $\alpha_{11}^{(m+q'_j)} > 0$ и $\alpha_{1j}^{(q_j)} > 0$. Таким образом, A^{m+q} имеет положительную строку и потому матрица A устойчива.

2) $p > 1$. $Q_r = \{i \in \mathcal{N} \,|\, \exists k \in \mathbb{Z}: \; \alpha_{1i}^{(r+kp)} > 0\}$, $r = 1, 2, ..., p$. $Q_s \cap Q_t = \varnothing$ при $s \neq t$: $\alpha_{1i}^{(u)} > 0$, $\alpha_{1i}^{(v)} > 0 \;\Rightarrow\; u \equiv v (\mathrm{mod}\, p)$ (т.к. для некоторого k существует по лемме 7 $\alpha_{i1}^{(k)} > 0$ и потому $\alpha_{11}^{(u+k)} > 0$ и $\alpha_{11}^{(v+k)} > 0$). Если $\alpha_{ij} > 0$ для $i \in Q_r$, т.е. $\alpha_{1i}^{(r+kp)} > 0$, то и $\alpha_{1j}^{(r+1+kp)} > 0$ (при $r = p$ имеем $r + 1 + kp = 1 + (k+1)p$). То есть, разбиение $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} Q_i$ задает периодичность матрицы A периода p. $\square$

4. Динамика в приводимом случае.

— **Лемма 1.** Пусть $B = (\beta_{ij})$ — $m \times m$-матрица такая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{ij} < 1$, $j = 1, ..., m$; тогда $\lim B^k = 0$ при $k \to \infty$.

Доказательство. $|Bx| = \sum\limits_i |\sum\limits_j \beta_{ij} x_j| \leqslant \sum\limits_i (\sum\limits_j \beta_{ij}) |x_j| \leqslant \gamma \sum\limits_j |x_j| = \gamma |x|$, где $\gamma = \max\limits_j \sum\limits_i \beta_{ij} < 1$. То есть $|Bx| \leqslant \gamma |x| \;\Rightarrow\; |B^k x| \leqslant \gamma^k |x| \;\Rightarrow\; |\lambda^k x| \to 0 \Rightarrow \lambda^k \to 0 \quad \forall x$ при $k \to \infty$. $\square$

— Экономическая интерпретация леммы 1.

— **Лемма 2.** Если $B^k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\det(E - B) \neq 0$ (т.е. $E - B$ — обратимая матрица).

Доказательство. Имеем $(E-B)(E+B+\dots+B^k)=E-B^{k+1}\to E$ и потому $E+B+\dots+B^k\to(E-B)^{-1}$ при $k\to\infty$. $\square$

— Пусть $B=(\beta_{ij})$ — $m\times m$-подматрица в матрице обмена, соответствующая подмножеству T; y_0 — первоначальное распределение капитала в странах T; $a_0=(\alpha_{01},...,\alpha_{0m})$ — строка экспорта в страну C_0 ($C_0\notin T$) из стран, входящих в T; μ_k — суммарная прибль страны C_0 за счет стран из T после k туров.

Имеем $\mu_k=a_0(E+B+\dots+B^k)y_0=a_0(E-B)^{-1}(E-B^{k+1})y_0$. Отсюда предельный доход страны C_0: $\mu=\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k=a_0(E-B)^{-1}y_0$.

Пример

$$B_0=\begin{pmatrix}0,2 & 0,5\\ 0,5 & 0,3\end{pmatrix};\quad (E-B)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{0,7}{0,31} & \frac{0,5}{0,31}\\ \frac{0,5}{0,31} & \frac{0,8}{0,31}\end{pmatrix}$$

$y_0=(1,1)$, $(E-B)^{-1}y_0=(1,2/0,31;1,3/0,31)$.
C_1 получит $0,1\cdot\frac{1,2}{0,31}=\frac{0,12}{0,31}$;
C_3 получит $0,2\cdot\frac{1,2}{0,31}=\frac{0,24}{0,31}$;
C_5 получит $0,2\cdot\frac{1,3}{0,31}=\frac{0,26}{0,31}$.

5. Равновесие цен в линейных моделях обмена.

— n — продуктов $G_1,...,G_n$ (столбцы), m — потребителей $C_1,...,C_m$ (строки).

— Пусть $A=(\alpha_{ij})\geqslant 0$ — $m\times n$-матрица субъективной плоезности; (α_{ij} — субективная полезность единицы продукта G_j для потребителя C_i).

— Предполагаем, что $a_i\neq 0$, $i=1,...,m$ и $a^j\neq 0$, $j=1,...,n$ (в противном случае нулевые линии можно вычеркнуть).

— $b=(\beta_1,...,\beta_m)>0$ — вектор доходов потребителей (β_i — доход потребителя C_i); будем считать, что $\sum\limits_{i=1}^m\beta_i=1$.

— $y_i=(\eta_{i1},...,\eta_{in})$ — ассортиментный набор продуктов потребителя C_i.

— $\mu_i=\sum\limits_{j=1}^n\alpha_{ij}\eta_{ij}=a_iy_i$ — полезность ассортиментного набора для потребителя C_i.

— Ассортиментный набор для C_i называется *допустимым*, если $py_i\leqslant\beta_i$, где $p=(\pi_1,...,\pi_n)\geqslant 0$ — вектор цен на продукты.

— Требуеися найти: $p=(\pi_1,...,\pi_n)\geqslant 0$ — вектор цен и $\overline{y}_i=(\overline{\eta}_{i1},...,\overline{\eta}_{in})$ — ассортиментные наборы такие, что

— (1) $\sum\limits_{i=1}^n\pi_i=1$.

— (2) $\sum\limits_{i=1}^n\overline{y}_i=v=(1,...,1)$.

— (3) $p\overline{y}_i\leqslant\beta_i$, $i=1,...,m$.

— (4) $\max a_iy_i=a_i\overline{y}_i$.

— Векторы $p=(\pi_1,...,\pi_n)\geqslant 0$ — вектор цен, $\overline{y}_i=(\overline{\eta}_{i1},...,\overline{\eta}_{in})\geqslant 0$, удовлетворяющие условиям (1)–(4), называются *равновесными.*

— (1),(2),(3) $\Rightarrow$ $p\overline{y}_i = \beta_i,\ i = 1, ..., m$. ($\sum\limits_{i=1}^{m} p\overline{y}_i = p\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{y}_i = pv = \sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i = 1$.)

— $\pi_j > 0,\ j = 1, ..., n$ (при $\pi_j = 0$ потребитель, у которого $\alpha_{ij} > 0$, потребует неограниченное количество продукта G_j). Обоснование: если $\pi_j = 0$ и $\alpha_{ij} > 0$, то выполнение неравенства $p\overline{y}_i \leqslant \beta_i$ не зависит от выбора $\overline{\eta}_{ij}$ и потому $\max a_i y_i = \infty$ (но при нарушении условия (2)). Таким образом, полагаем $\pi_j > 0,\ j = 1, ..., n$ в силу экономической нецелесообразности противного.

— $Y = \{y_1, ..., y_m \mid \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = v = (1, ..., 1),\ y_i \geqslant 0\}$ — множество ассортиментных наборов (Y ограниченное замкнутое множество в $V_n \times \cdots \times V_n$).

— **Теорема 1.** Для заданных матрицы A и вектора b равновесный вектор цен p и равновесные ассортиментные наборы $\overline{y}_i$ $i = 1, ..., m$ всегда существуют.

Доказательство. Определим на Y функцию $\varphi(y_1, ..., y_m) = (a_1 y_1)^{\beta_1} \cdots (a_m y_m)^{\beta_m}$. По теореме Вейерштрасса (непрерывная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве в конечномерном евклидовом пространстве, достигает своего максимального значения) существуют наборы $\overline{y}_1, ..., \overline{y}_m$, которые максимизируют эту функцию. Докажем, что они и есть искомые равновесные наборы. При этом компоненты равновесного вектора цен определяются равенствами $\pi_j = \max\limits_i \frac{\alpha_{ij}\beta_i}{a_i\overline{y}_i},\ j = 1, ..., n$. Доказательство разобьем на две леммы.

— **Лемма 1.** Пусть для заданных $\overline{y}_i \geqslant 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{y}_i = v$; $\pi_j = \max\limits_i \frac{\alpha_{ij}\beta_i}{a_i\overline{y}_i},\ j = 1, ..., n$ выполнено условие

$$\pi_j = \frac{\alpha_{ij}\beta_i}{a_i\overline{y}_i} \Leftrightarrow \overline{\eta}_{ij} > 0, \tag{$*$}$$

тогда $p = (\pi_1, ..., \pi_n)$ — равновесный вектор цен, а $\overline{y}_i$ — равновесные асортиментные наборы (т.е. выполнены (1)–(4)).

Доказательство. Так как все $a_i \neq 0$, то $a_i\overline{y}_i > 0$, а значит и все только что определенные π_j тоже положительны (т.к. $A \geqslant 0$ и $b > 0$, то максимум по i дроби $\frac{\alpha_{ij}\beta_i}{a_i\overline{y}_i}$ положителен).

Условие (2) выполняется по построению.

Проверим (3) (т.е. допустимость каждого $y_i,\ i = 1, ..., m$). В силу (*) имеем $\pi_j\overline{\eta}_{ij} = \frac{\beta_i}{a_i\overline{y}_i}\alpha_{ij}\overline{\eta}_{ij}$ для всех i, j. Поэтому $p\overline{y}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j\overline{\eta}_{ij} = \frac{\beta_i}{a_i\overline{y}_i}\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\eta}_{ij} = \beta_i$.

Проверим (1). Суммируя последнее равенство (по i), получим $1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i = \sum\limits_{i=1}^{m} p\overline{y}_i = pv = \sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j$.

Наконец, проверим (4). Будем считать, что $\alpha_{11}/\pi_1 = \max\limits_j \alpha_{1j}/\pi_j$ (иначе перенумеруем индексы). Тогда для ассортиментного набора y_1 имеем $a_1 y_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\eta_{1j} \leqslant \frac{\alpha_{11}}{\pi_1}\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j\eta_{1j} \leqslant \frac{\alpha_{11}}{\pi_1}\beta_1$. С другой стороны, по определению π_1 имеем $\pi_1 \geqslant \frac{\alpha_{11}\beta_1}{a_1\overline{y}_1}$ или

$a_1\overline{y}_1 \geqslant \frac{\alpha_{11}}{\pi_1}\beta_1$. Отсюда $a_1 y_1 \leqslant a_1\overline{y}_1$, т.е. $a_1\overline{y}_1$ максимизирует $a_1 y_1$. □

Лемма 2. В условиях теоремы 1 имеем $\pi_j = \frac{\alpha_{ij}\beta_i}{a_i\overline{y}_i} \Leftrightarrow \overline{\eta}_{ij} > 0$ (т.е $(*)$ леммы 1).

Доказательство. Предположим, что $\overline{\eta}_{11} > 0$, но $\pi_1 > \frac{\alpha_{11}\beta_1}{a_1\overline{y}_1}$. По определению для некоторого i (для определенности считаем $i = 2$) имеем $\pi_1 = \frac{\alpha_{21}\beta_2}{a_2\overline{y}_2}$. Тогда $\alpha_{21}\beta_2(a_1\overline{y}_1) > \alpha_{11}\beta_1(a_2\overline{y}_2)$ (**). Покажем, что это противоречит максимальности системы наборов $\overline{y}_1, ..., \overline{y}_m$.

Пусть $y_1' = (\overline{\eta}_{11} - \varepsilon, \overline{\eta}_{12}, ..., \overline{\eta}_{1n})$, $y_2' = (\overline{\eta}_{21} + \varepsilon, \overline{\eta}_{22}, ..., \overline{\eta}_{2n})$, где $0 < \varepsilon < \overline{\eta}_{11}$. Для системы наборов $y_1', y_2', \overline{y}_3, ..., \overline{y}_m$ условие (2) сохраняется. Далее, $\varphi(y_1', y_2', \overline{y}_3, ..., \overline{y}_m) - \varphi(\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_m) = [(a_1\overline{y}_1 - \alpha_{11}\varepsilon)^{\beta_1}(a_2\overline{y}_2 + \alpha_{21}\varepsilon)^{\beta_2} - (a_1\overline{y}_1)^{\beta_1}(a_2\overline{y}_2)^{\beta_2}] \times (a_3\overline{y}_3)^{\beta_3} \cdots (a_m\overline{y}_m)^{\beta_m}$. Преобразуя выражение в квадратных скобках (формула бинома), получим

$(a_1\overline{y}_1)^{\beta_1 - 1}(a_2\overline{y}_2)^{\beta_2 - 1}[(a_1\overline{y}_1)\alpha_{21}\beta_2 - (a_2\overline{y}_2)\alpha_{11}\beta_1]\varepsilon +$члены с ε в степенях $\geqslant 2$.

Из неравенства (**) видно выражение при ε в первой степени положительно. Следовательно, для достаточно малого ε и все выражение будет положительно, что дает требуемое противоречие. □

— **Лемма 3.** Пусть задан $p = (\pi_1, ..., \pi_n)$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j = 1$, $\mu_i = \max\limits_j \frac{\alpha_{ij}}{\pi_j}$. Тогда $\overline{y}_i$ такой, что $p\overline{y}_i \leqslant \beta_i$ является равновесным тогда и только тогда, когда

$$\overline{\eta}_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_{ij}}{\pi_j} = \mu_i \tag{1}$$

(для потребителя C_i продукт G_j *предпочтительнее*).

Доказательство. По определению μ_i имеем $\frac{\alpha_{ij}}{\pi_j} \leqslant \mu_i$ или $\alpha_{ij} \leqslant \mu_i\pi_j$ для всех j. Умножая последние неравенства на $\overline{\eta}_{ij}$ и суммируя по j, получим $a_i\overline{y}_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\overline{\eta}_{ij} \leqslant \mu_i \sum\limits_{j=1}^{m} \overline{\eta}_{ij}\pi_j = \mu_i p\overline{y}_i = \mu_i\beta_i$. Здесь равенство имеет место тогда и только тогда, когда имеет место (1). В самом деле, если выполнено (1), то после умножения на $\overline{\eta}_{ij}$ все неравенства $\alpha_{ij} \leqslant \mu_i\pi_j$ обращаются в равенства для всех j, т.е. будем иметь $a_i\overline{y}_i = \mu_i\beta_i$. Если же y_i условию (1) не удовлетворяет, то будем иметь $a_i y_i < \mu_i\beta_i$. Отсюда $a_i\overline{y}_i = \max a_i y_i$. Обратно, если $a_i y_i < mu_i\beta_i$, то хотя бы для одного j такого, что $\overline{\eta}_{ij} > 0$ должны иметь $\frac{\alpha_{ij}}{\pi_j} < \mu_i$ ($\alpha_{ij} < \mu_i\pi_j$). □

— **Замечания.** 1) Относительность субъективных полезностей.

2) Экономическая интерпретация функции φ в доказательстве теоремы 1.

3) Выход к выпуклому программированию.

— Пример. Рассмотрим матрицу полезностей

	G_1	G_2	G_3
C_1	4	3	1
C_2	2	3	2
C_3	3	1	2

Ее равновесный вектор цен есть $p = (1,2;\ 1,0;\ 0,8)$.

Соответствующие наборы есть $y_1 = (5/6, 0, 0)$, $y_2 = (0, 1, 0)$, $y_3 = (1/6, 0, 1)$, равновесность которых проверяется по лемме 3.

— **Теорема 2.** Равновесный вектор цен p единствинен.

Доказательство. Напомним, что $p > 0$. Пусть p и p' — два равновесных вектора цен. Положим $\theta = \max_j(\pi'_j/\pi_j)$ и пусть $J = \{j \in \mathcal{N} \,|\, \pi'_j/\pi_j = \theta\}$. По лемме 3 $\eta_{ij} > 0$, если

$$\frac{\alpha_{ij}}{\pi_j} \geqslant \frac{\alpha_{ik}}{\pi_k} \qquad \text{для всех } k. \tag{1}$$

Положим $I = \{i \in \mathcal{M} \,|\, \exists j \in J : \frac{\alpha_{ij}}{\pi'_j} \geqslant \frac{\alpha_{ik}}{\pi'_k},\ k = 1, ..., n\}$ (потребитель C_i предпочитает хотя бы один продукт G_j для $j \in J$ при ценах p').

Так как дохода β_i потребителя C_i, $i \in I$ должно хватить на оплату всех G_j, $j \in J$ при ценах p', то

$$\sum_I \beta_i \geqslant \sum_J \pi' = \theta \sum_J \pi_j. \tag{2}$$

Если $i \in I$, то по определению I существует $j \in J$ такое, что

$$\frac{\alpha_{ij}}{\pi'_j} \geqslant \frac{\alpha_{ik}}{\pi'_k} \qquad \text{для всех } k. \tag{3}$$

Если C_i предпочитает G_r при ценах p, то

$$\frac{\alpha_{ir}}{\pi_r} \geqslant \frac{\alpha_{ij}}{\pi_j} = \frac{\theta\alpha_{ij}}{\pi'_j} \geqslant \frac{\theta\alpha_{ir}}{\pi'_r}. \tag{4}$$

Отсюда $\pi'_r/\pi_r \geqslant \theta$ и потому $r \in J$, т.е. каждый продукт, который предпочителен для всех потребителей из I при ценах p, является продуктом из J. Это означает, что

$$\sum_I \beta_i \leqslant \sum_J \pi_j, \tag{5}$$

поскольку потребители из I покупают продукты только из J при ценах p и должны тратить на них весь свой доход. Из (2) и (5) получаем $\theta = 1$ и $p = p'$. $\square$