Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №3, с. 31–41 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0029*

А.В. ПЕЧКУРОВ

БИСЕКТОРИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ПУЧКИ И ЗАДАЧА ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ

Аннотация. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение, не разрешенное относительно производной. Предполагается, что спектр соответствующего пучка содержится в двух секторах. Изучается существование и единственность ограниченного решения при любом ограниченном свободном члене.

Ключевые слова: бисекториальный операторный пучок, задача об ограниченных решениях, функция Грина.

УДК: 517.986

Хорошо известно [1]–[3], что существование единственного ограниченного на оси решения уравнения $u' - Au = f$ при любой ограниченной правой части f равносильно тому, что спектр линейного ограниченного оператора A не пересекает мнимую ось.

Частный случай этого утверждения, относящийся к ситуации, когда весь спектр лежит в левой полуплоскости, легко переносится на случай неограниченного коэффициента A, удовлетворяющего условию секториальности [4]–[8], означающему, что спектр лежит в некотором секторе, содержащемся в левой полуплоскости, а резольвента удовлетворяет некоторой оценке роста на бесконечности.

В данной работе рассматривается случай бисекториального пучка, т. е. случай, когда спектр содержится в двух секторах, лежащих в левой и правой полуплоскостях соответственно (см. левый рис. 1a)). Понятие бисекториального пучка (в терминологии оригинала — биполугруппы) $\lambda \mapsto \lambda\mathbf{1} - A$ (здесь $\mathbf{1}$ — тождественный оператор), порожденного неограниченным оператором A, введено в [9] и исследовалось в [10]. В данной статье рассматривается более общий бисекториальный пучок $\lambda \mapsto \lambda F - G$. Предполагается, что операторы F и G действуют из банахова пространства X в банахово пространство Y и являются ограниченными; случай неограниченных F и G обычно к этому сводится [11].

Отметим две особенности рассматриваемой задачи. В случае секториального пучка и уравнения $u' - Au = f$, когда коэффициент A действует из своей области определения $D(A) \subset X$ в X, соответствующая полугруппа операторов $T(t)$, $t \geq 0$, уже действует из X в X (а не в $D(A)$). Поэтому решение $u(t) = \int\limits_0^{+\infty} T(s) f(t-s)\, ds$ принимает значения в X (а не в $D(A)$). В случае бисекториального пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G$ и уравнения $Fu' - Gu = f$ пространство X, на котором заданы F и G, оказывается аналогом $D(A)$ и поэтому для

Поступила 05.03.2011

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-000276.

функции f, принимающей значения в Y, решение может принимать значения в более широком пространстве, чем X. Для уравнения $Fu' - Gu = f$ нахождение более широкого подходящего пространства, содержащего X, является отдельной задачей. В связи с этим в статье рассматриваются функции f, принимающие значения в некотором подпространстве Y^1 пространства Y. Косвенно это означает, что X превращается в пространство, объемлющее область определения F и G. Дополнительные построения (см. пример 2 в разделе 4) позволяют применять результат статьи (теорему) и для f, принимающих значения во всем Y; при этом u принимает значения в более широком пространстве, чем X.

Вторая особенность заключается в следующем. Если для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с неограниченным секториальным оператором функция Грина $t \mapsto \mathcal{G}(t)$ имеет в нуле разрыв первого рода, то для произвольного бисекториального пучка возникает суммируемый разрыв второго рода (предложение 5).

Наиболее близкой к данной работе является статья [12]. В ней отмечается, что если существует суммируемая функция Грина, то при любой ограниченной правой части существует единственное ограниченное решение, но условия существования этой функции Грина не приводятся. Близкие вопросы рассматривались также в [13]; в отличие от данной работы в [13] часть спектра, лежащая в правой полуплоскости, предполагалась ограниченной.

Отметим еще одно направление [4]–[7], [13]–[15] в рассматриваемом круге задач, когда бесконечность является полюсом резольвенты пучка или, что равносильно, полугруппа или биполугруппа, порожденная пучком, оказывается вырожденной. Такой случай в данной работе не рассматривается.

В разделе 1 дается определение бисекториального пучка. В разделе 2 изучаются свойства функции Грина. В разделе 3 доказывается существование и единственность ограниченного на оси решения дифференциального уравнения. Наконец, в разделе 4 приводятся примеры.

1. Y^1-бисекториальные пучки

Пусть X и Y — банаховы пространства. Символом $\mathbf{B}(X,Y)$ обозначим пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y. Пусть $F, G \in \mathbf{B}(X,Y)$. (*Линейным*) *пучком* называют функцию $\lambda \mapsto \lambda F - G$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *Резольвентным множеством* пучка называют множество $\rho(F,G)$, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda F - G$ обратим, а *резольвентой* пучка — функцию (семейство) $R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}$, $\lambda \in \rho(F,G)$. Дополнение $\sigma(F,G) = \mathbb{C} \setminus \rho(F,G)$ к резольвентному множеству называют *спектром* пучка.

Пучок $\lambda \mapsto \lambda F - G$ назовем (ср. [10], с. 16) *бисекториальным*, если существуют такие $\delta_0 \in (0, \pi/2]$ и $h_0 > 0$, что множество комплексных чисел (см. рис. 1a))

$$\Omega_{\delta_0,h_0} = \left\{ \lambda : -\frac{\pi}{2} - \delta_0 < \arg\lambda < \frac{\pi}{2} + \delta_0,\ \frac{\pi}{2} - \delta_0 < \arg\lambda < -\frac{3\pi}{2} + \delta_0 \right\} \cup \{\lambda : |\operatorname{Re}\lambda| < h_0\}$$

содержится в резольвентном множестве пучка, причем для каждых $\delta \in (0, \delta_0)$ и $h \in (0, h_0)$ существуют такие $M \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{Z}$, что

$$\|(\lambda F - G)^{-1}\|_{Y \to X} \le M(1 + |\lambda|)^m, \quad \lambda \in \Omega_{\delta,h}. \tag{1}$$

Предположим, что в Y имеется линейное подпространство Y^1, полное относительно своей нормы $\|\cdot\|_1$, обладающей свойством $\|y\| \le \|y\|_1$ для $y \in Y^1$. Очевидно, $\|T\|_{Y^1 \to X} \le \|T\|_{Y \to X}$ для любого линейного ограниченного оператора $T : Y \to X$. В качестве простейшего примера можно считать, что $Y^1 = Y$; более сложный пример приведен в разделе 4.

Пучок $\lambda \mapsto \lambda F - G$ назовем Y^1-*бисекториальным*, если существуют такие $\delta_0 \in (0, \pi/2]$ и $h_0 > 0$, что множество Ω_{δ_0,h_0} содержится в резольвентном множестве пучка, причем для каждых $\delta \in (0, \delta_0)$ и $h \in (0, h_0)$ существует такое $M \in \mathbb{R}$, что выполнена оценка

$$\|(\lambda F - G)^{-1}\|_{Y^1 \to X} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_{\delta,h}. \tag{2}$$

Ниже предполагается, что пучок $\lambda \mapsto \lambda F - G$ является Y^1-бисекториальным и фиксирован.

Замечание. В формулировке основной теоремы данной работы пространство Y не упоминается. Нетрудно проследить, что и в доказательствах неравенство (1) можно всюду заменить неравенством (2). Тем не менее, мы сохраняем неравенство (1), поскольку его достаточно для существования функции Грина $\mathcal{G}(t)$ на более широком пространстве Y.

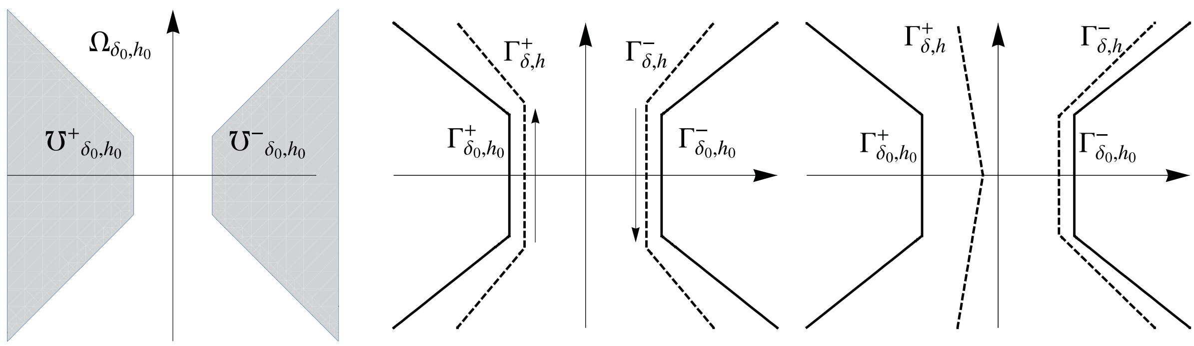

Рис. 1. a) множество Ω_{δ_0,h_0}; b) границы множеств Ω_{δ_0,h_0} и $\Omega_{\delta,h}$ (стрелками показана ориентация); c) исправленная кривая $\Gamma^+_{\delta,h}$

Для всякой функции f, аналитической в окрестности некоторого множества $\mho_{\delta,h} = \mathbb{C} \setminus \Omega_{\delta,h}$, где $\delta \in (0, \delta_0)$, $h \in (0, h_0)$, положим (при условии, что интеграл сходится)

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\delta,h}} f(\lambda)(\lambda F - G)^{-1}\, d\lambda,$$

где $\Gamma_{\delta,h}$ — контур, являющийся границей множества $\mho_{\delta,h}$ и ориентированный как показано на рис. 1b). Отметим, что $\Gamma_{\delta,h}$ состоит из двух частей $\Gamma^+_{\delta,h}$ и $\Gamma^-_{\delta,h}$.

2. Функция Грина

Рассмотрим функции

$$\exp_t^+(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda t}, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda < 0; \\ 0, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda > 0, \end{cases} \qquad \exp_t^-(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda < 0; \\ e^{\lambda t}, & \text{если } \operatorname{Re}\lambda > 0, \end{cases}$$

$$g_t(\lambda) = \begin{cases} \exp_t^+(\lambda), & \text{если } t > 0; \\ -\exp_t^-(\lambda), & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Положим

$$X^+(t) = \varphi(\exp_t^+), \quad t > 0,$$
$$X^-(t) = \varphi(\exp_t^-), \quad t < 0,$$
$$\mathcal{G}(t) = \varphi(g_t), \qquad t \neq 0.$$

Функцию $\mathcal{G}$ будем называть *функцией Грина.* Приводимая ниже формула (4) показывает, что $\mathcal{G}$ действительно является функцией Грина задачи об ограниченных решениях.

Предложение 1. *Интегралы*

$$X^{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,h}} \exp_t^{\pm}(\lambda)(\lambda F - G)^{-1}\, d\lambda$$

не зависят от выбора контура $\Gamma_{\delta,h}$ *с* $\delta \in (0, \delta_0)$ *и* $h \in (0, h_0)$.

Доказательство вытекает из экспоненциального убывания функций $\exp_t^{\pm}$ на $\Gamma_{\delta,h}$.

Предложение 2. *При* $t \neq 0$ *функция* $t \mapsto \mathcal{G}(t)$ *дифференцируема относительно нормы пространства* $\mathbf{B}(Y, X)$ *(и, следовательно, относительно нормы пространства* $\mathbf{B}(Y^1, X)$*) и удовлетворяет дифференциальному уравнению* $F\dot{\mathcal{G}}(t) - G\mathcal{G}(t) = \mathbf{0}$.

Доказательство. Покажем, что функции $X^{\pm}(t) = \varphi(\exp_t^{\pm})$ при $t > 0$ и $t < 0$ соответственно удовлетворяют уравнению $F\dot{X}(t) - GX(t) = 0$. Для производных имеем представление

$$\dot{X}^{\pm}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,h}^{\pm}} \frac{e^{\lambda\Delta t} - 1}{\Delta t} e^{\lambda t}(\lambda F - G)^{-1}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,h}^{\pm}} \lambda e^{\lambda t}(\lambda F - G)^{-1}\, d\lambda.$$

(Переходить к пределу под знаком интеграла можно, поскольку последний интеграл сходится равномерно по $t \in K$ для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.) Далее имеем

$$F\dot{X}^{\pm}(t) - GX^{\pm}(t) = F\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,h}^{\pm}} \lambda \exp_t^{\pm}(\lambda)(\lambda F - G)^{-1} d\lambda - G\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,h}^{\pm}} \exp_t^{\pm}(\lambda)(\lambda F - G)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,h}^{\pm}} \exp_t^{\pm}(\lambda)(\lambda F - G)(\lambda F - G)^{-1}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,h}^{\pm}} \exp_t^{\pm}(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Последнее равенство следует из теоремы Коши. □

Лемма. *Для* $\lambda \in \rho(F, G) \setminus \{0\}$ *справедливо тождество* ($\mathbf{1}$ *— тождественный оператор*)

$$F(\lambda F - G)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{1} + \frac{1}{\lambda}G(\lambda F - G)^{-1}.$$

Доказательство сводится к непосредственной проверке.

Предложение 3. *Произведение* $F\mathcal{G}(t) : Y^1 \to Y$ *имеет предел по норме пространства* $\mathbf{B}(Y^1, Y)$ *при* $t \to \pm 0$. *При этом справедливо равенство*

$$\lim_{t \to +0} F\mathcal{G}(t) - \lim_{t \to -0} F\mathcal{G}(t) = \mathbf{1}.$$

Доказательство. В соответствии с леммой Жордана ([16], с. 436) гомотопируем контур $\Gamma_{\delta,h}^{+}$ (рис. 1b)) в интеграле (здесь и далее $(\lambda F - G)^{-1} : Y^1 \to X$, а $F, G : X \to Y$)

$$F\mathcal{G}(t) = F\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,h}} g_t(\lambda)(\lambda F - G)^{-1}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\delta,h}^{+}} e^{\lambda t}F(\lambda F - G)^{-1}\, d\lambda,$$

определяющем $F\mathcal{G}(t)$ при $t > 0$, в вертикальную прямую

$$F\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda t}F(\lambda F - G)^{-1}\, d\lambda.$$

В соответствии с леммой, сформулированной выше, преобразуем этот интеграл к виду (с обходом нуля слева)[1]

$$F\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} e^{\lambda t} F(\lambda F - G)^{-1}\,d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda}\mathbf{1}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda}G(\lambda F - G)^{-1}\,d\lambda.$$

В силу леммы Жордана и теоремы Коши первый интеграл при $t > 0$ равен нулю. Поэтому

$$F\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda}G(\lambda F - G)^{-1}\,d\lambda.$$

В этом представлении перейдем к пределу при $t \to +0$ (это можно делать, поскольку, благодаря оценке (2), интеграл сходится равномерно):

$$F\mathcal{G}(+0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} \frac{1}{\lambda}G(\lambda F - G)^{-1}\,d\lambda.$$

Аналогичным образом получаем

$$F\mathcal{G}(-0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+0-i\infty}^{+0+i\infty} \frac{1}{\lambda}G(\lambda F - G)^{-1}\,d\lambda,$$

где вертикальная прямая обходит нуль справа.

После вычитания интегралов, определяющих $F\mathcal{G}(+0)$ и $F\mathcal{G}(-0)$, получаем интеграл по окружности γ маленького радиуса, окружающей нуль и *проходимой по часовой стрелке*:

$$F\mathcal{G}(+0) - F\mathcal{G}(-0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{\lambda}G(\lambda F - G)^{-1}\,d\lambda.$$

Применяя теорию вычетов, получаем $F\mathcal{G}(+0) - F\mathcal{G}(-0) = -G(0F - G)^{-1} = GG^{-1} = \mathbf{1}$. □

Предложение 4. *Функция $\mathcal{G}$ и ее производная экспоненциально убывают при $t \to \infty$ по норме пространства $\mathbf{B}(Y, X)$ (и, следовательно, по норме пространства $\mathbf{B}(Y^1, X)$), т. е. существуют такие M, $\gamma > 0$, что при достаточно больших $|t|$*

$$\|\mathcal{G}(t)\|_{Y\to X} + \|\dot{\mathcal{G}}(t)\|_{Y\to X} \le Me^{-\gamma|t|}.$$

Доказательство. Согласно определению X^+ можно представить в виде

$$X^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+_{\delta,h}} e^{\lambda t}(\lambda F - G)^{-1}\,d\lambda, \quad t > 0.$$

Изменим кривую $\Gamma^+_{\delta,h}$, как показано на рис. 1c): в качестве $\Gamma^+_{\delta,h}$ возьмем два луча $\arg(\lambda - a) = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$, где $a \in (-h, 0)$, а $\delta > 0$ достаточно мало.

Уходящий вверх луч $\Gamma^{++}_{\delta,h}$ кривой $\Gamma^+_{\delta,h}$ параметризуем так: $\lambda = a - s\sin\delta + is\cos\delta$, $s \in [0, +\infty)$. Оценим интеграл по этому лучу при $t \ge 1$. Имеем

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{++}_{\delta,h}} e^{\lambda t}(\lambda F - G)^{-1}\,d\lambda\right\|_{Y^1\to X} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{(a - s\sin\delta)t} M\bigl(1 + |a + se^{i(\pi/2+\delta)}|\bigr)^m\,ds \le$$
$$\le M_1 e^{at}\int_0^{+\infty} e^{-ts\sin\delta}(1+s)^m\,ds \le M_1 e^{at}\int_0^{+\infty} e^{-s\sin\delta}(1+s)^m\,ds.$$

[1]Вычет в нуле равен нулю, поэтому не важно, с какой стороны его обходить.

Интеграл справа, очевидно, сходится. Остается напомнить, что $a < 0$.

Другие интегралы оцениваются аналогично. $\square$

Предложение 5. *Функция $t \mapsto \mathcal{G}(t) : Y^1 \to X$ суммируема в нуле.*

Доказательство. Пусть $t > 0$. Тогда

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+_{\delta,h}} e^{\lambda t} (\lambda F - G)^{-1} \, d\lambda,$$

где $\Gamma^+_{\delta,h}$ — левая граница множества $\Omega_{\delta,h}$ (см. рис. 1c)). Представим $\Gamma^+_{\delta,h}$ как объединение двух лучей, уходящих в бесконечность. Уходящий вверх луч $\Gamma^{++}_{\delta,h}$ параметризуем так: $\lambda = -s \sin\delta + is\cos\delta$, $s \in [0, +\infty)$. Оценим интеграл по $\Gamma^{++}_{\delta,h}$, используя оценку (2),

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{++}_{\delta,h}} e^{\lambda t} (\lambda F - G)^{-1} \, d\lambda \right\|_{Y^1 \to X} \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{M e^{-ts\sin\delta}}{1 + |s e^{i(\pi/2+\delta)}|} \, ds = M_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts\sin\delta} \, ds}{1+s}.$$

После выполнения замены $ts = \sigma$ получаем продолжение оценки

$$M_1 \int_0^{+\infty} e^{-ts\sin\delta} \frac{ds}{1+s} = M_1 \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\sin\delta} \frac{d\sigma}{t+\sigma} \le M_1 \left(\int_1^{+\infty} e^{-\sigma\sin\delta} \frac{d\sigma}{\sigma} + \int_0^1 \frac{d\sigma}{t+\sigma} \right).$$

Первый интеграл не зависит от t, а второй вычисляется: $\int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{t+\sigma} = \ln(1+t) - \ln t$. Поэтому окончательно для t, близких к нулю, получаем суммируемую оценку

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{++}_{\delta,h}} e^{\lambda t} (\lambda F - G)^{-1} \, d\lambda \right\|_{Y^1 \to X} \le M_2 + M_3 |\ln t|.$$

Остальные интегралы, определяющие $t \mapsto \mathcal{G}(t)$, оцениваются аналогично. $\square$

3. Существование ограниченных решений

Обозначим через $C = C(\mathbb{R}, Y)$ пространство всех ограниченных непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to Y$. Аналогично символом $C^1 = C^1(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство всех дифференцируемых функций $u : \mathbb{R} \to X$, ограниченных и непрерывных вместе с производной.

Теорема. *Пусть пучок является Y^1-бисекториальным. Тогда для любой $f \in C(\mathbb{R}, Y^1)$ уравнение*

$$\big(Fu\big)'(t) - Gu(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

имеет единственное решение $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$, которое представимо в виде

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(t-s) f(s) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Доказательство. Покажем, что функция (4) удовлетворяет уравнению (3) (поскольку функция f принадлежит $C(\mathbb{R}, Y^1)$, а ядро $\mathcal{G}(\cdot)$ суммируемо (предложения 4 и 5), этот интеграл сходится). Имеем (здесь используется предложение 2 и правила дифференцирования несобственного интеграла, зависящего от параметра)

$$\left(\int_{-\infty}^t F\mathcal{G}(t-s) f(s) \, ds \right)' = F\mathcal{G}(+0) f(t) + \int_{-\infty}^t \big(F\mathcal{G}(t-s)\big)'_t f(s) \, ds =$$

$$= F\mathcal{G}(+0) f(t) + \int_{-\infty}^t G\mathcal{G}(t-s) f(s) \, ds = F\mathcal{G}(+0) f(t) + G \int_{-\infty}^t \mathcal{G}(t-s) f(s) \, ds,$$

$$\Big(\int_t^{+\infty} F\mathcal{G}(t-s)f(s)\,ds\Big)' = -F\mathcal{G}(-0)f(t) + \int_t^{+\infty}\big(F\mathcal{G}(t-s)\big)'_t f(s)\,ds =$$
$$= -F\mathcal{G}(-0)f(t) + \int_t^{+\infty} G\mathcal{G}(t-s)f(s)\,ds = -F\mathcal{G}(-0)f(t) + G\int_t^{+\infty}\mathcal{G}(t-s)f(s)\,ds.$$

Отсюда

$$\big(Fu\big)'(t) = \Big(\int_{-\infty}^{t} F\mathcal{G}(t-s)f(s)\,ds\Big)' + \Big(\int_t^{+\infty} F\mathcal{G}(t-s)f(s)\,ds\Big)' =$$
$$= \big(F\mathcal{G}(+0) - F\mathcal{G}(-0)\big)f(t) + G\Big(\int_{-\infty}^{t}\mathcal{G}(t-s)f(s)\,ds + \int_t^{+\infty}\mathcal{G}(t-s)f(s) - \,ds\Big) =$$
$$= \big(F\mathcal{G}(+0) - F\mathcal{G}(-0)\big)f(t) + Gu(t).$$

Видно, что $\big(Fu\big)'(t) - Gu(t) = \big(F\mathcal{G}(+0) - F\mathcal{G}(-0)\big)f(t)$. Остается применить предложение 3.

Докажем единственность. Пусть $u \in C^1$ является решением уравнения $F\dot{u} - Gu = 0$. Перейдем в этом уравнении к преобразованию Фурье (в смысле обобщенных функций [17], [18]). Имеем $i\omega F\widehat{u}(\omega) - G\widehat{u}(\omega) = 0$ или $(i\omega F - G)\widehat{u}(\omega) = 0$, где $\widehat{u}$ — преобразование Фурье функции u. В силу бисекториальности пучка оператор $i\omega F - G$ обратим при всех $\omega \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\widehat{u} = 0$. Значит, и $u = 0$. Подробнее см. [19]. □

4. Примеры

Обозначим через $C_{2\pi}$ банахово пространство всех непрерывных 2π-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_t |x(t)|$, а через $C_{2\pi\,0}$ — замкнутое подпространство функций $x \in C_{2\pi}$, для которых $\int\limits_0^{2\pi} x(t)dt = 0$. Обозначим через $C^1_{2\pi\,0}$ подпространство функций $x \in C_{2\pi\,0}$, лежащих в $C_{2\pi\,0}$ вместе с производной, с нормой $\|x\|_1 = \|x\|_{C_{2\pi\,0}} + \|x'\|_{C_{2\pi\,0}}$.

Рассмотрим оператор $D : C^1_{2\pi\,0} \to C_{2\pi\,0}$, определенный по формуле

$$Dx = ix'.$$

Очевидно, операторы D, $\mathbf{1} : C^1_{2\pi\,0} \to C_{2\pi\,0}$ ограничены, причем D является изоморфизмом. Нетрудно видеть, что спектр оператора D, рассматриваемого как оператор, действующий из $C_{2\pi\,0}$ в $C_{2\pi\,0}$ с областью определения $C^1_{2\pi\,0} \subset C_{2\pi\,0}$, совпадает с множеством $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Нетрудно проверить, что резольвента оператора $D : C_{2\pi\,0} \to C^1_{2\pi\,0}$ представима в виде

$$\big((\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}g\big)(t) = -\frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\lambda s}}{1 - e^{-2\pi i\lambda}}\,g(t-s)\,ds = -\frac{1}{i}\int_{t-2\pi}^{t}\frac{e^{-i\lambda(t-s)}}{1 - e^{-2\pi i\lambda}}\,g(s)\,ds.$$

Поэтому

$$\|(\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}\|_{C_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}} \le \|(\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \le \int_0^{2\pi}\frac{|e^{-i\lambda s}|}{|1 - e^{-2\pi i\lambda}|}\,ds =$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{e^{s\operatorname{Im}\lambda}}{|1 - e^{2\pi\operatorname{Im}\lambda}e^{-2\pi i\operatorname{Re}\lambda}|}\,ds = \frac{|e^{2\pi\operatorname{Im}\lambda} - 1|}{|\operatorname{Im}\lambda|\cdot|1 - e^{2\pi\operatorname{Im}\lambda}e^{-2\pi i\operatorname{Re}\lambda}|}.$$

Отсюда легко вывести, что для резольвенты справедлива оценка

$$\|(\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}\|_{C_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}} \le \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_{\delta,h}, \tag{5}$$

с произвольным $\delta \in (0, \pi/2)$ и некоторыми M и $h > 0$.

Из оценки (5) и тождества $D(\lambda\mathbf{1}-D)^{-1}=\lambda(\lambda\mathbf{1}-D)^{-1}-\mathbf{1}$ видно, что

$$\|D(\lambda\mathbf{1}-D)^{-1}\|_{C_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}}\le\frac{M|\lambda|}{1+|\lambda|}+1\le M_1,\qquad \lambda\in\Omega_{\delta,h}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\|(\lambda\mathbf{1}-D)^{-1}\|_{C_{2\pi\,0}\to C^1_{2\pi\,0}}\le M_2,\quad \lambda\in\Omega_{\delta,h}. \tag{7}$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$u'(t)-\big(Du\big)(t)=f(t) \tag{8}$$

с функцией $f:\mathbb{R}\to C_{2\pi\,0}$ относительно функции $u:\mathbb{R}\to C_{2\pi\,0}$.

Положим $Y=C_{2\pi\,0}$ и $X=Y^1=C^1_{2\pi\,0}$. Оценки (7) и (5) показывают, что оценки (1) и (2) имеют место, причем оценка (1) выполняется с $m=0$. Следовательно, по основной теореме данной работы *уравнение* (8) *при любой* $f\in C(\mathbb{R},C^1_{2\pi\,0})$ *имеет единственное решение* $x\in C^1(\mathbb{R},C^1_{2\pi\,0})$. Этот пример иллюстрирует явление бисекториальности в простейшем случае.

Пример 2. Обсудим, как путем дополнительных рассуждений, с помощью основной теоремы можно получать решения, соответствующие $f\in C(\mathbb{R},C_{2\pi\,0})$. Обозначим[1] через $C^{-1}_{2\pi\,0}$ еще один экземпляр пространства $C_{2\pi\,0}$ с прежней нормой. Чтобы отличать элементы пространства $C^{-1}_{2\pi\,0}$ от элементов пространства $C_{2\pi\,0}$ для первых будем использовать обозначение типа $y^{(1)}$; тем самым соответствие $y\mapsto y^{(1)}$ является изометрическим изоморфизмом $C_{2\pi\,0}$ на $C^{-1}_{2\pi\,0}$. Определим вложение $\mathbf{1}_1:C_{2\pi\,0}\to C^{-1}_{2\pi\,0}$ правилом $x\mapsto(D^{-1}x)^{(1)}$. Тогда, как видно из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
C^1_{2\pi\,0} & \xrightarrow{D} & C_{2\pi\,0}\\
\big\downarrow \mathbf{1} & & \big\downarrow \mathbf{1}_1\\
C_{2\pi\,0} & \xrightarrow{D_1} & C^{-1}_{2\pi\,0},
\end{array}$$

где символ $\mathbf{1}:C^1_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}$ означает каноническое вложение, отображение $y\mapsto y^{(1)}$ оказывается расширением $D_1:C_{2\pi\,0}\to C^{-1}_{2\pi\,0}$ отображения $D:C^1_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}$; при этом обратное к нему $D_1^{-1}:C^{-1}_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}$ задается правилом $y^{(1)}\mapsto y$. Еще раз отметим, что $D_1:C_{2\pi\,0}\to C^{-1}_{2\pi\,0}$ является изометрическим изоморфизмом.

Согласно принятым определениям оператор $\lambda\mathbf{1}_1-D_1:C_{2\pi\,0}\to C^{-1}_{2\pi\,0}$ задается правилом

$$x\mapsto\lambda(D^{-1}x)^{(1)}-x^{(1)}=(\lambda D^{-1}x-x)^{(1)}=\big((\lambda\mathbf{1}-D)D^{-1}x\big)^{(1)}.$$

Сделаем в этом правиле замену $z=(\lambda\mathbf{1}-D)D^{-1}x$, где $x,z\in C_{2\pi\,0}$, или, что то же самое, $x=D(\lambda\mathbf{1}-D)^{-1}z$. В результате получим представление $D(\lambda\mathbf{1}-D)^{-1}z\mapsto z^{(1)}$. Из этого представления видно, что оператор $(\lambda\mathbf{1}_1-D_1)^{-1}:C^{-1}_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}$ задается правилом

$$z^{(1)}\mapsto D(\lambda\mathbf{1}-D)^{-1}z. \tag{9}$$

Отсюда видно, что

$$\|(\lambda\mathbf{1}_1-D_1)^{-1}\|_{C^{-1}_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}}\le\|(\lambda\mathbf{1}-D)^{-1}\|_{C_{2\pi\,0}\to C^1_{2\pi\,0}}\cdot\|D\|_{C^1_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}}.$$

---

[1]Элементы пространства $C^{-1}_{2\pi\,0}$ можно интерпретировать как обобщенные производные функций $x\in C^{-1}_{2\pi\,0}$ (с множителем $-i$).

Поэтому в силу оценки (7) $\|(\lambda\mathbf{1}_1 - D_1)^{-1}\|_{C^{-1}_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}} \le M_3$ при $\lambda \in \Omega_{\delta,h}$. Представляя с помощью формулы (9) оператор $\mathbf{1}_1(\lambda\mathbf{1}_1 - D_1)^{-1} = (\lambda\mathbf{1}_1 - D_1)^{-1} : C^{-1}_{2\pi\,0} \to C^{-1}_{2\pi\,0}$ в виде $z^{(1)} \mapsto \big((\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}z\big)^{(1)}$, получаем оценку

$$\|(\lambda\mathbf{1}_1 - D_1)^{-1}\|_{C^{-1}_{2\pi\,0}\to C^{-1}_{2\pi\,0}} \le \|(\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}\|_{C_{2\pi\,0}\to C^{1}_{2\pi\,0}},$$

из которой с помощью (5) имеем

$$\|(\lambda\mathbf{1}_1 - D_1)^{-1}\|_{C^{-1}_{2\pi\,0}\to C^{-1}_{2\pi\,0}} \le \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_{\delta,h}.$$

Положим $Y = C^{-1}_{2\pi\,0}$ и $X = Y^1 = C_{2\pi\,0}$. Полученные выше оценки показывают, что оценки (1) и (2) имеют место, причем оценка (1) выполняется с $m = 0$. Следовательно, по основной теореме *уравнение* (8) *при любой* $f \in C(\mathbb{R}, C_{2\pi\,0})$ *имеет единственное решение* $x \in C^1(\mathbb{R}, C_{2\pi\,0})$.

Пример 3. Рассмотрим уравнение (с оператором $F \ne \mathbf{1}$)

$$\big(D^{-1}u\big)'(t) - u(t) = f(t) \tag{10}$$

с функцией $f : \mathbb{R} \to C_{2\pi\,0}$, относительно функции $u : \mathbb{R} \to C_{2\pi\,0}$. Оператор D предполагается прежним. Из представления $(\lambda D^{-1} - \mathbf{1})^{-1} = \big(D^{-1}(\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}\big) = D(\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}$ и формулы (6) имеем

$$\|(\lambda D^{-1} - \mathbf{1})^{-1}\|_{C_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}} \le M_4, \quad \lambda \in \Omega_{\delta,h}.$$

А из формулы (5) и тождества $(\lambda D^{-1} - \mathbf{1})^{-1} = (\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}D$ получаем

$$\begin{aligned}\|(\lambda D^{-1} - \mathbf{1})^{-1}\|_{C^{1}_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}} &= \|(\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}D\|_{C^{1}_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}} \le \\ &\le \|(\lambda\mathbf{1} - D)^{-1}\|_{C_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}} \cdot \|D\|_{C^{1}_{2\pi\,0}\to C_{2\pi\,0}} \le \frac{M_5}{1+|\lambda|}, \qquad \lambda \in \Omega_{\delta,h}.\end{aligned}$$

Положим $X = Y = C_{2\pi\,0}$ и $Y^1 = C^1_{2\pi\,0}$. Последние неравенства показывают, что оценки (1) и (2) имеют место, причем оценка (1) выполняется с $m = 0$. Следовательно, по теореме *уравнение* (10) *при любой* $f \in C(\mathbb{R}, C^1_{2\pi\,0})$ *имеет единственное решение* $x \in C^1(\mathbb{R}, C_{2\pi\,0})$.

Пример 4. Опишем вкратце (ввиду ограниченного объема статьи) схему построения более сложного примера уравнения, для которого может возникать явление бисекториальности. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$B\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - A\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x) = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $A, B : \mathbb{C}^n \to \mathbf{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$ — многочлены, $\frac{\partial}{\partial x} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, u — функция со значениями в $\mathbb{C}^k$.

В качестве Y возьмем гильбертово пространство $L_2 = L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$ всех суммируемых с квадратом функций, определенных на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{C}^k$, а в качестве X — подпространство L_2, состоящее из функций v, для которых $B\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big)v$ и $A\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big)v$ (понимаемые в смысле обобщенных функций) попадают в L_2.

Будем предполагать, что многочлен B *подчинен* многочлену A в том смысле, что степень l многочлена A строго больше степени многочлена B. Кроме того, будем предполагать, что многочлен A является *эллиптическим* в том смысле, что сумма $A_l(\omega)$ одночленов, входящих в многочлен A и имеющих степень равную ровно l, обратима при всех $\omega \in \mathbb{R}^n$ с $\|\omega\| = 1$. В этом случае пространство X оказывается пространством Соболева W^l_2.

Очевидно, рассматриваемое уравнение можно записать в операторном виде (3) и понимать его решение в соответствующем смысле.

Преобразуем пучок $\lambda B\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big) - A\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big)$ с помощью преобразования Фурье, т. е. перейдем к пучку $C_\lambda = \mathcal{F}\Big(\lambda B\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big) - A\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big)\Big)\mathcal{F}^{-1}$, где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в L_2. Непосредственно проверяется, что C_λ является оператором умножения

$$\big(C_\lambda v\big)(\omega) = \big(\lambda B(\omega) - A(\omega)\big)v(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^n.$$

В силу подчиненности многочлена B многочлену A коэффициент $c(\omega) = \lambda B(\omega) - A(\omega)$ (при любом $\lambda \in \mathbb{C}$) при $\omega \to \infty$ ведет себя так же, как функция $\omega \mapsto A(\omega)$. Поэтому необходимым и достаточным условием обратимости оператора C_λ является обратимость коэффициента $c(\omega) = \lambda B(\omega) - A(\omega)$ при всех $\omega \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, спектр пучка $\lambda \mapsto \lambda B\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big) - A\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big)$ совпадает с множеством тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых коэффициент $c(\omega) = \lambda B(\omega) - A(\omega) \in \mathbf{B}(\mathbb{C}^k)$ не обратим хотя бы при одном $\omega \in \mathbb{R}^n$. Иными словами, спектр пучка $\lambda \mapsto \lambda B\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big) - A\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big)$ совпадает с множеством тех $\lambda \in \mathbb{C}$, которые являются решением уравнения

$$\det\big(\lambda B(\omega) - A(\omega)\big) = 0$$

хотя бы при одном $\omega \in \mathbb{R}^n$. Тем самым спектр пучка эффективно вычисляется.

При разумных ограничениях на A и B можно оценивать скорость роста резольвенты пучка на бесконечности и тем самым проверять бисекториальность.

Отметим *простейший* частный случай. Пусть $k = 2$, оператор $B\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big)$ является тождественным, а $A\big(-i\frac{\partial}{\partial x}\big)$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -\Delta + \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \Delta - \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

где Δ — оператор Лапласа. Тогда пучок, очевидно, является бисекториальным. Этот тривиальный пример показывает, что в рассматриваемом классе уравнений возможно интересующее нас явление бисекториальности.

Литература

[1] Perron O. *Die Stabilitätsfrage bie Differentialgleichungen*, Math. Z. **32** (5), 703–728 (1930).

[2] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* (Наука, М., 1970).

[3] Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. *Нелинейные почти периодические колебания* (Наука, М., 1970).

[4] Баскаков А.Г. *Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов*, Соверемен. матем. Фундамент. направления **9**, 3–151 (МАИ, М., 2004).

[5] Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *О полугруппах распределений с сингулярностью в нуле и ограниченных решениях линейных дифференциальных включений*, Матем. заметки **79** (1), 19–33 (2006).

[6] Баскаков А.Г. *Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений*, Изв. РАН. Сер. матем. **73** (2), 3–68 (2009).

[7] Бичегкуев М.С. *К теории бесконечно дифференцируемых полугрупп операторов*, Алгебра и анализ **22** (2), 1–13 (2010).

[8] Хенри Л. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений* (Мир, М., 1985).

[9] Bart H., Gohberg I., Kaashoek M.A. *Wiener–Hopf factorization, inverse Fourier transforms and exponentially dichotomous operators*, J. Funct. Anal. **68** (1), 1-42 (1986).

[10] Van der Mee C.V.M. *Exponentially dichotomous operators and applications* (Birkhäuser, Berlin, 2008).

[11] Курбатова И.В. *Банахова алгебра, связанная с линейным операторным пучком*, Матем. заметки **86** (3), 394–401 (2009).

[12] Баскаков А. Г. *Спектральные свойства дифференциального оператора* $\frac{d}{dt} - A_0$ *с неограниченным оператором* A_0, Дифференц. уравнения **27** (12), 2162–2164 (1991).
[13] Федоров В.Е., Сагадеева М.А. *Об ограниченных на прямой решениях линейных уравнений соболевского типа с относительно секториальными операторами*, Изв. вузов. Матем., № 4, 81–84 (2005).
[14] Курбатова И.В. *Об обобщенной импульсной характеристике*, Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Физ.-мат. науки, № 1, 148–152 (2007).
[15] Печкуров А.В. *Операторные пучки, биполугруппы и задачи об ограниченных решениях*, Spectral and Evolution Problems, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, 2011), **21**, с. 75–86.
[16] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного* (Наука, М., 1965).
[17] Schwartz L. *Distributions á valeurs vectorielles*, Ann. Inst. Fourier **7**, 1–141 (1957).
[18] Schwartz L. *Distributions á valeurs vectorielles.* II, Ann. Inst. Fourier **8**, 1–209 (1957).
[19] Печкуров А.В. *Об обратимости в пространстве Шварца оператора, порожденного пучком умеренного роста*, Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Физ.-матем. науки, № 2, 111–118 (2011).

А.В. Печкуров

аспирант, кафедра математических методов исследования операций,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394000, Россия,

e-mail: apechkurov@gmail.com

A.V. Pechkurov

Bisectorial operator pencils and the problem of bounded solutions

Abstract. We consider a linear differential equation unresolved with respect to the derivative. We assume that the spectrum of the corresponding pencil is contained in two sectors. We study the unique existence of a bounded solution for any bounded free term.

Keywords: bisectorial operator pencil, boundary value problem, Green function.

A.V. Pechkurov

Postgraduate, Chair of Mathematical Methods of Operational Research,
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, 394000 Russia,

e-mail: apechkurov@gmail.com