КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Бережной Д.В., Тазюков Б.Ф.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ – 2007

1. Дифференциальная постановка задачи.

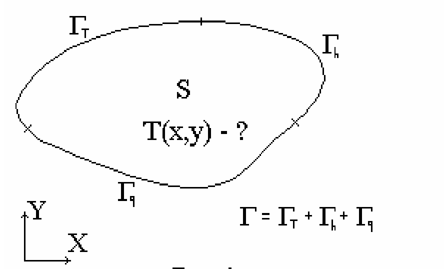


Рис.1

Рассмотрим процесс распространения тепла в замкнутой плоской области площадью S и ограниченной контуром Γ, как приведено на рисунке 1, в предположении малости возникающих температурных отклонений, функцию которых $T(x,y)$ и будем рассматривать в качестве неизвестной. В этом случае дифференциальное уравнение теплопроводности, выполняющееся в S, будет иметь следующий вид

$$\lambda \Delta T(x,y) + q_s = 0. \tag{1.1}$$

Здесь λ - коэффициент теплопроводности, q_s - удельная мощность внутренних источников тепла, $\Delta(\ldots)$ - оператор Лапласа.

Граничные условия могут быть трех типов. Представим, что контур Γ разбит на три части, на каждой из которых задаются граничные условия одного типа:

$$\Gamma = \Gamma_T + \Gamma_q + \Gamma_h = \sum_{k=1}^{K} \Gamma_T^k + \sum_{m=1}^{M} \Gamma_q^m + \sum_{n=1}^{N} \Gamma_h^n , \tag{1.2}$$

где K, M, N - число участков границы, на которых заданы граничные условия одного типа.

1) На части контура Γ_T известна температура

$$T(x,y)|_{\Gamma_T} = T^*; \tag{1.3}$$

2) На части контура Γ_q задан тепловой поток

$$\lambda \frac{\partial T(x,y)}{\partial n}|_{\Gamma_T} = -q_n^*, \tag{1.4}$$

где n - координата по внешней нормали к поверхности, q_n^* - плотность теплового потока, который считают положительным, если тело теряет теплоту;

3) На части контура Γ_h происходит конвективный теплообмен

$$\lambda \frac{\partial T(x,y)}{\partial n}|_{\Gamma_T} = -h(T(x,y)|_{\Gamma_T} - T_\infty^*), \tag{1.5}$$

где h - коэффициент конвекции, T_∞^* - температура окружающей среды.

Таким образом, для отыскания неизвестной функции $T(x,y)$ необходимо решить краевую задачу, когда внутри области S удовлетворяется уравнение (1.1), а на внешнем контуре задаются граничные условия вида (1.3-1.5).

Будем считать решение точным, если неизвестная функция получена в виде конечной совокупности известных функций. Точное решение удовлетворяет исходному уравнению внутри области и всем граничным условиям в любой точке из их области определения. Если решение получено в виде бесконечного ряда по известной системе функций, то такое решение называется аналитическим. Это решение (в виде бесконечного ряда) также удовлетворяет исходному уравнению внутри области и всем граничным условиям в любой точке из их области определения, однако суммирование такого ряда всегда происходит с некоторой погрешностью. Численное решение получают, вводя некоторые допущения на вид функции, вид исходных уравнений и граничных условий и т.д., поэтому численное решения изначально неточное.

Оно может представляться в виде некоторой функции, либо в виде совокупности значений этой функции в некоторой системе точек.

2. Метод коллокаций.

Одним из наиболее простых методов решения краевых задач является метод коллокаций. В области S и на контуре Γ определяется конечная система произвольно выбранных точек. Предполагается, что дифференциальное уравнение (1.1) и граничные условия (1.3-1.5) выполняются не в любой точке области или соответствующего контура, а лишь в изначально выбранных точках. Неизвестная функция отклонений температур представляется в виде конечного ряда по системе полных ортогональных функций $\varphi_i(x, y)$ с неизвестными коэффициентами a_i

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{I} a_i \varphi_i(x, y) . \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) подставляется в уравнение (1.1) и удовлетворяется в выбранных точках области S. В результате получается несколько линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_i. Далее, получаем подобные линейные уравнения, подставляя (2.1) в граничные условия (1.3-1.5) и удовлетворяя их в соответствующих точках. Так как в любой точке области S или контура Γ выполняется только одно уравнение, то в случае совпадения общего числа неизвестных I и общего числа точек получается замкнутая система линейных уравнений для определения коэффициентов a_i. Решая полученную систему линейных уравнений, определяем выражение для неизвестной функции отклонения температур (2.1), т.е. находим приближенное решение задачи. Можно отметить, что для регулярных областей и регулярной системы точек метод коллокаций сходится.

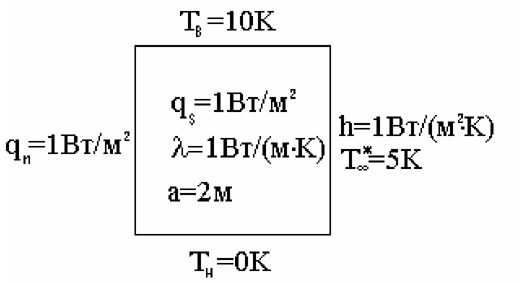


Рис.2

В качестве примера на основе метода коллокаций приведем алгоритм решения следующей задачи теплопроводности. Для плоского квадратного сечения бесконечно длинной трубы, приведенного на рисунке 2, необходимо определить установившееся распределение отклонений температур при следующих граничных условиях:

1) на верхнем краю сечения задано постоянное отклонение температуры $T_в = 10\ К$;
2) на нижнем краю сечения задано постоянное отклонение температуры $T_н = 0\ К$;
3) на левом краю сечения задан постоянный поток тепла $q_п = 1\ Вт/м^2$;
4) на правом краю сечения выполняются условия конвективного теплообмена с коэффициентом теплоотдачи $h = 1\ Вт/(м^2 \cdot К)$ при температуре окружающей среды $T_\infty^* = 5\ К$.

Коэффициент теплопроводности $\lambda = 1\ Вт/(м \cdot К)$, размер стороны квадратного сечения $a = 2\ м$, удельная мощность внутренних источников тепла $q_s = 1$.

Рассмотрим самое простое распределение точек коллокации – девять: одна точка внутри области и восемь по границе. Нумерация точек и их положение приведено на рисунке 3. Выберем декартовую систему координат, оси которой параллельны сторонам сечения, а центр расположен в центре сечения. Примем, что в угловых точках сечения (принадлежащих смежным сторонам квадрата) удовлетворяется только одно граничное условие, в нашем случае это будет условие на отклонение температуры. Тогда согласно нумерации точек коллокации, приведенной на рисунке, в точках $1, 2, 3$ удовлетворяются граничные условия на отклонение температуры вида $T_в = 10\, К$, в точках $7, 8, 9$ - граничные условия вида $T_н = 0\, К$, в точке 4 задан поток тепла $q_n = 1\, Вт/м^2$, в точке 6 задан конвективный теплообмен с коэффициентом теплоотдачи $h = 1\, Вт/(м^2 \cdot К)$ при температуре окружающей среды $T_\infty^* = 5\, К$. В точке 5 должно удовлетворяться уравнение теплопроводности.

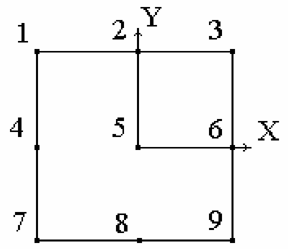


Рис.3

Для того чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных, аппроксимирующее решение примем в виде

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\psi_i(x)\psi_j(y)\,. \tag{2.2}$$

В качестве системы функций ψ_i возьмем полиномы. Тогда функция $T(x,y)$ примет вид

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x^{i-1}y^{j-1}\,. \tag{2.3}$$

Подставим $T(x,y)$ в граничные условия и в уравнение теплопроводности.

$$\lambda\Delta(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1})+q_s = \\ =\lambda(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}((i-1)(i-2)x^{i-3}y^{j-1}+(j-1)(j-2)x^{i-1}y^{j-3})+q_s=0 \qquad (2.4)$$

Здесь следует учитывать, что при $i=\overline{1,2}$ или при $j=\overline{1,2}$ выражения $(i-1)(i-2)x^{i-3}$ или $(j-1)(j-2)y^{j-3}$ соответственно при нулевых значениях x или y обращаются в 0.

Граничные условия на поток тепла примут вид

$$\lambda\frac{\partial}{\partial n}(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1})+q_n=-\lambda\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1})+q_n= \\ =-\lambda(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i-1)a_{ij}x^{i-2}y^{j-1})+q_n=0 \qquad (2.5)$$

Условия на конвективный теплообмен можно записать в виде

$$\lambda\frac{\partial}{\partial n}(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1})+h(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1}-T_\infty^*)= \\ =\lambda\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1})+h(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1}-T_\infty^*)= \\ =\lambda(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i-1)a_{ij}x^{i-2}y^{j-1})+h(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1}-T_\infty^*)=0. \qquad (2.6)$$

Условия на температуру на нижнем или верхнем краю сечения можно записать как

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1}=T_н \text{ или } \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x^{i-1}y^{j-1}=T_в. \qquad (2.7)$$

Развернем суммы в уравнениях (2.4-2.7). Тогда они запишутся в виде:

- уравнение теплопроводности

$$\lambda(2a_{13}+2xa_{23}+2a_{31}+2ya_{32}+2(x^2+y^2)a_{33})+q_s=0, \qquad (2.8)$$

- граничные условия на поток

$$-\lambda(a_{21}+ya_{22}+y^2a_{23}+2xa_{31}+2xya_{32}+2xy^2a_{33})+q_n=0, \tag{2.9}$$

- граничные условия на конвективный теплообмен

$$\begin{aligned}&\lambda(a_{21}+ya_{22}+ya_{23}+2xa_{31}+2xya_{32}+2xy^2a_{33})+\\&+h(a_{11}+ya_{12}+y^2a_{13}+xa_{21}+xya_{22}+\\&+xy^2a_{23}+x^2a_{31}+x^2ya_{32}+x^2y^2a_{33}-T_\infty^*)=0,\end{aligned} \tag{2.10}$$

- граничные условия на температуру

$$a_{11}+ya_{12}+y^2a_{13}+xa_{21}+xya_{22}+xy^2a_{23}+x^2a_{31}+x^2ya_{32}+x^2y^2a_{33}=T_н, \tag{2.11}$$

$$a_{11}+ya_{12}+y^2a_{13}+xa_{21}+xya_{22}+xy^2a_{23}+x^2a_{31}+x^2ya_{32}+x^2y^2a_{33}=T_в. \tag{2.12}$$

Удовлетворив уравнение (2.8) в точке 5, уравнение (2.9) в точке 4, уравнение (2.10) в точке 6, уравнение (2.11) в точках $7-9$, уравнение (2.12) в точках $1-3$, получим систему линейных уравнений вида

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1&1&1&1\\1&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&-\lambda&0&0&-2\lambda&0&0\\0&0&2\lambda&0&0&0&2\lambda&0&0\\h&0&0&\lambda+h&0&0&2\lambda+h&0&0\\1&-1&1&-1&1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&1&1&-1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\\a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\\a_{31}\\a_{32}\\a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_в\\T_в\\T_в\\-q_n\\-q_s\\hT_\infty^*\\T_н\\T_н\\T_н\end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Решая полученную систему линейных уравнений, определим неизвестные константы a_{ij}. Подставляя их в выражение (2.3), найдем приближенное представление неизвестной функции $T(x,y)$.

3. Метод конечных разностей.

Метод конечных разностей является одним из наиболее распространенных методов решения краевых задач. Предполагается, что область покрыта системой чаще всего регулярно расположенных точек. Уравнения (1.1), (1.3-1.5) записываются в заданных точках, причем производные в них заменяются выражениями, содержащими значения неизвестной функции в некоторых окружающих выбранную точках. При этом определяется система линейных уравнений относительно значений неизвестной функции в выбранной системе точек. Полученную систему линейных уравнений можно решать либо прямым методом, либо организовать итерационную схему вычислений.

Конечно-разностные формулы можно получить разными путями. Рассмотрим один из них, связанный с геометрическими аналогиями производных.

Пусть задана некоторая функция

$$y = f(x), \tag{3.1}$$

вид которой приведен на рисунке 2. Введем произвольную систему точек в области определения функции (3.1). Координаты этих точек примут значения $x_1, x_2, \dots, x_n$. Примем, для простоты, что все эти n точек равноотстоящие друг от друга. Обозначим через Δx расстояние между двумя соседними точками. Пусть

$$f(x_i) = y_i. \tag{3.2}$$

Тогда используя определение правосторонней производной, можно записать

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, \tag{3.3}$$

причем чем меньше Δx, тем точнее формула (3.2). Аналогично можно записать формулы

$$y_i' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \tag{3.4}$$

и

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}. \tag{3.5}$$

Аналогичным образом, дважды применяя формулу (3.3), определим вторую производную

$$\begin{gathered}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} = y_i'' = \left(y_i'\right)' \approx \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)' = \frac{1}{\Delta x}(y_{i+1}' - y_i') \approx \\ \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{\Delta x} - \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2}.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Аналогично можно записать

$$y_i'' \approx \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2} \tag{3.7}$$

или

$$y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}. \tag{3.8}$$

Далее, обобщим полученные выражения для производных на функцию двух переменных $T(x, y)$.Определяя равномерную систему точек для аргументов, введем следующие обозначения

$$x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = \Delta z \text{ для } \forall\, i, j; \tag{3.9}$$

$$T(x_i, y_j) = T_{i,j}\,. \tag{3.10}$$

Тогда выражения для первых и вторых производных примут вид

$$\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_i,\,y=y_j} = (T_{i,j})_x{}' \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta z} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta z} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta z}, \tag{3.11}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right|_{x=x_i,\,y=y_j} = (T_{i,j})_y{}' \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta z} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta z} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta z}, \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}\right|_{x=x_i,\,y=y_j} = (T_{i,j})_{xx}{}'' \approx \frac{T_{i+2,j} - 2T_{i+1,j} + T_{i,j}}{\Delta z^2} \approx \\ \approx \frac{T_{i,j} - 2T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{\Delta z^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta z^2},\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}\right|_{x=x_i,\,y=y_j} = (T_{i,j})_{yy}{}'' \approx \frac{T_{i,j+2} - 2T_{i,j+1} + T_{i,j}}{\Delta z^2} \approx \\ \approx \frac{T_{i,j} - 2T_{i,j-1} + T_{i,j-2}}{\Delta z^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta z^2}.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Для лапласиана будем использовать выражение вида

$$\Delta T(x,y)\Big|_{x=x_i,\,y=y_j} = \left.\left(\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}\right)\right|_{x=x_i,\,y=y_j} = (T_{i,j})_{xx}{}'' + (T_{i,j})_{yy}{}'' \approx \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4T_{i,j}}{\Delta z^2}. \tag{3.14}$$

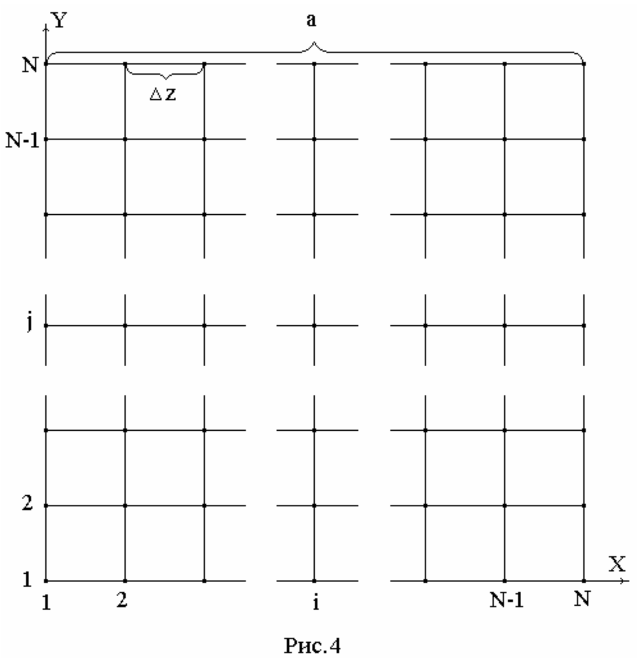


Рис.4

Итерационная схема решения задачи является более простой с точки зрения программиста. Покажем на примере задачи из предыдущего параграфа основы алгоритма для подобной схемы.

Как и в методе коллокаций, вводится конечная система точек внутри области и на ее границе. Неизвестными считаются значения функции температурных отклонений в этих точках. Для этих точек введем двойную систему нумерации, как показано на рисунке 4. Координаты любой точки с индексами i, j однозначно определяются по формулам

$$x_i = (i-1) \cdot \Delta z, \quad y_j = (j-1) \cdot \Delta z, \qquad (3.15)$$

где

$$\Delta z = \frac{a}{N-1}. \qquad (3.16)$$

Значения неизвестной функции будем определять по формуле (3.10). Итерационный метод решения задачи заключается в следующем:

1. задают начальное приближение неизвестной функции в заданной системе точек внутри области и, используя граничные условия, корректируют или точно определяют неизвестную функцию в граничных точках;
2. используя запись уравнения теплопроводности в конечных разностях, корректируют значения неизвестной функции во внутренних точках области, а далее, как и в первом пункте, корректируют (если нужно) значения функции в граничных точках;
3. сравнивают между собой значения неизвестной функции, полученные на последней итерации, с соответствующими значениями предыдущей, если заранее выбранный критерий точности удовлетворяется, то вычисления прекращаются и значения неизвестной функции на последней итерации принимаются за решение, в противном случае возвращаются на второй шаг итерационной схемы.

Теперь распишем этот алгоритм более подробно. Примем, что $T_{i,j}^{0}; i, j = \overline{1, N}$ - начальное приближение численного решения, $T_{i,j}^{k}; i, j = \overline{1, N}; k = 1,2,...$ - численное решение на последующих итерациях.

1. На первом шаге алгоритма необходимо присвоить начальные значения (например, нулевые) для значений $T_{i,j}^{0}; i, j = \overline{2, N-1}$. Значения отклонений температур в граничных точках можно определить следующим образом:

- для верхней границы (условия на температуру)

$$T_{i,j}^{0} = T_{в}; i = \overline{1, N};\ j = N; \tag{3.17}$$

- для нижней границы (условия на температуру)

$$T_{i,j}^{0} = T_{н}; i = \overline{1, N};\ j = 1; \tag{3.18}$$

- для левой границы (условия на поток тепла)

$$\begin{aligned}&\lambda \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial n}\right|_{x=x_1; y=y_j; j=\overline{2,N-1}} = -\lambda \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_1; y=y_j; j=\overline{2,N-1}} \approx \\ &\approx -\lambda \left.\frac{T_{2,j}^{0} - T_{1,j}^{0}}{\Delta z}\right|_{y=y_j; j=\overline{2,N-1}} = -q_n,\end{aligned} \tag{3.19}$$

откуда

$$T_{1,j}^{0} = T_{2,j}^{0} - \frac{q_n \Delta z}{\lambda};\ j = \overline{2, N-1}; \tag{3.20}$$

- для правой границы (условия на конвективный теплообмен)

$$\begin{aligned}&\lambda \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial n}\right|_{x=x_N; y=y_j; j=\overline{2,N-1}} = \lambda \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_N; y=y_j; j=\overline{2,N-1}} \approx \\ &\approx \lambda \left.\frac{T_{N,j}^{0} - T_{N-1,j}^{0}}{\Delta z}\right|_{y=y_j; j=\overline{2,N-1}} = -h(\left.T_{N,j}^{0}\right|_{y=y_j; j=\overline{2,N-1}} - T_{\infty}^{*}),\end{aligned} \tag{3.21}$$

откуда

$$T_{N,j}^0 = \frac{\lambda T_{N-1,j}^0 + T_\infty^* h\Delta z}{\lambda + h\Delta z};\ j = \overline{2, N-1}. \tag{3.22}$$

2. На втором шаге алгоритма корректируют заданные на начальной итерации значения неизвестной функции во внутренних точках. Для этого записывают уравнение теплопроводности в конечных разностях

$$\lambda\Delta T(x,y)\big|_{x=x_i,y=y_j,i,j=\overline{2,N-1}} \approx$$
$$\approx \left.\frac{T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k + T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k - 4T_{i,j}^k}{\Delta z^2}\right|_{x=x_i,y=y_j,i,j=\overline{2,N-1}} = -q_s, \tag{3.23}$$

откуда

$$T_{i,j}^k = \frac{1}{4}(q_s\Delta z^2 + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k + T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k),\ i,j = \overline{2, N-1}. \tag{3.24}$$

Первоначально считаем, что $k=1$. Значения неизвестной функции в граничных точках корректируются по формулам (3.17), (3.18), (3.20), (3.22), только в них для функции отклонений температур вместо нулевого верхнего индекса записывается индекс k.

3. На третьем шаге алгоритма сравнивают решения, полученные на двух последних итерациях. Чаще всего сравнивают с наперед заданным малым числом eps (порядка $0.01 \div 0.001$) величину $\left| \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N}(T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1})^2} \Big/ \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N}(T_{i,j}^{k-1})^2} \right|$.

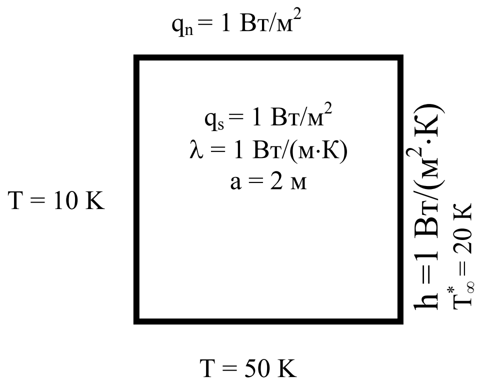
   Если эта величина меньше eps, то вычисления прекращают. В противном случае возвращаются на второй шаг алгоритма и продолжают вычисления.

4. Задание на летнюю практику.

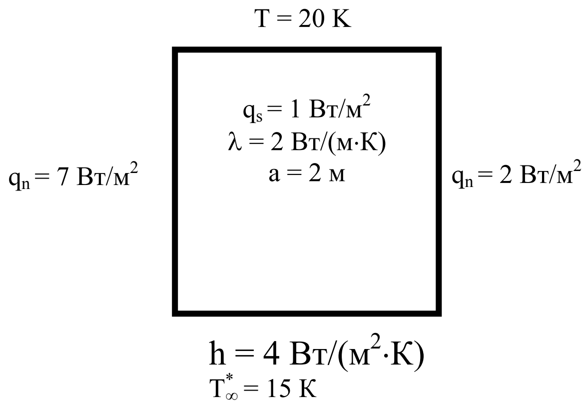
1) Решить задачу теплопроводности (найти распределение отклонений температур в сечении и представить его графически);
2) Исследовать сходимость предложенных методов решения задачи теплопроводности, результаты представить в графическом виде;
3) На основе одного из методов исследовать влияние отмеченного в задании параметра на решение задачи;
4) Оформить отчет о проделанной работе.

5. Варианты условий задач.

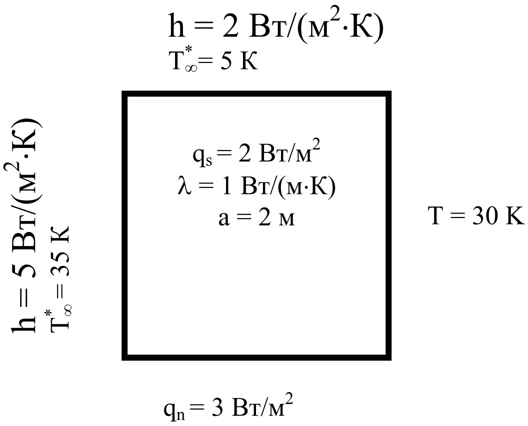
Вариант 1



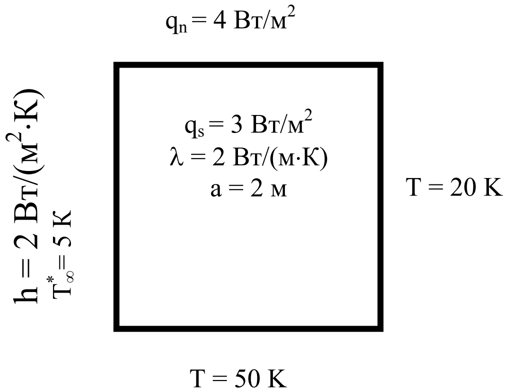
Вариант 2



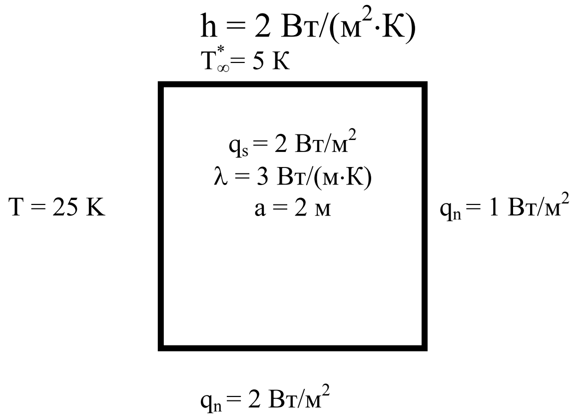
Вариант 3



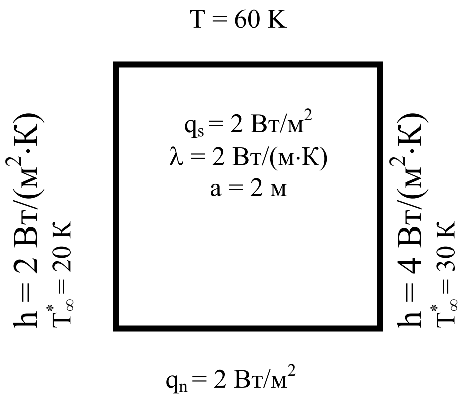
Вариант 4



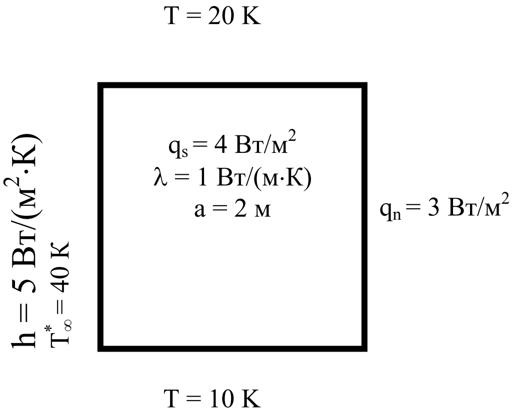
Вариант 5



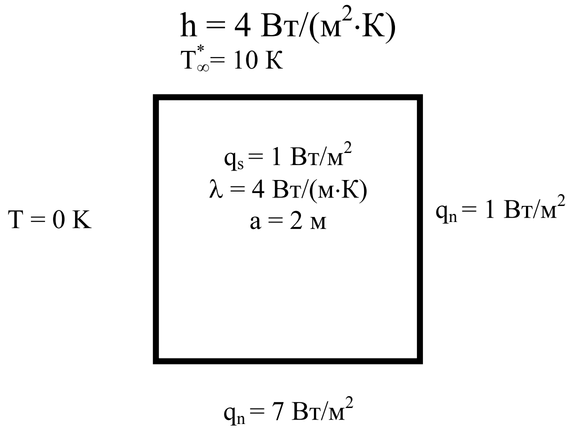
Вариант 6



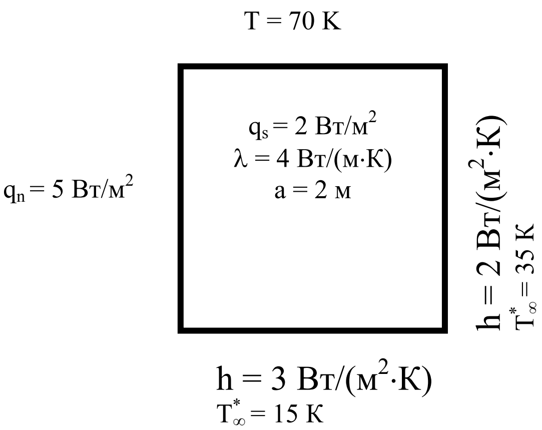
Вариант 7



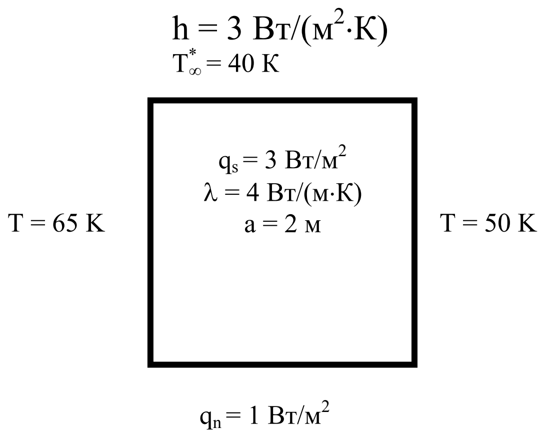
Вариант 8



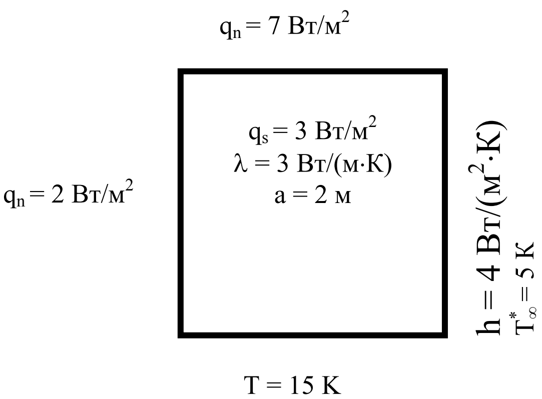
Вариант 9



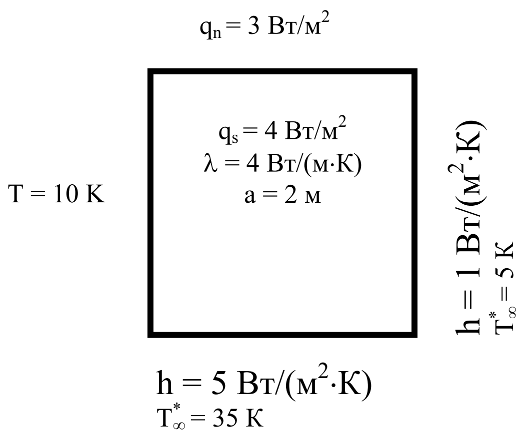
Вариант 10



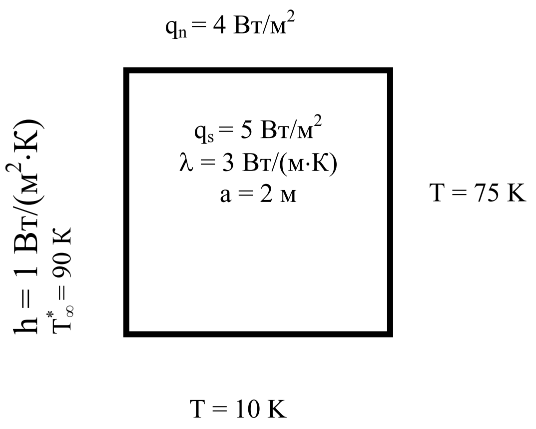
Вариант 11



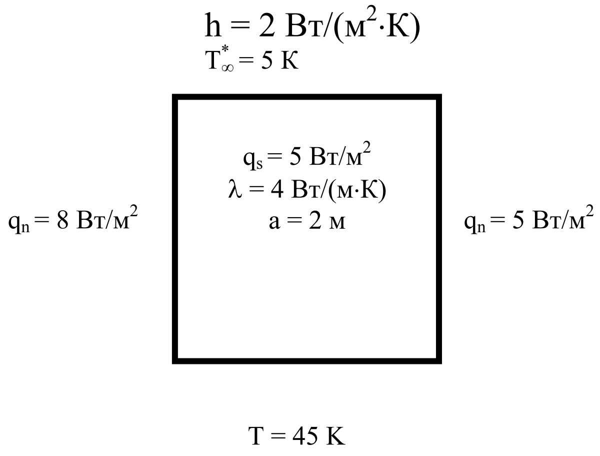
Вариант 12



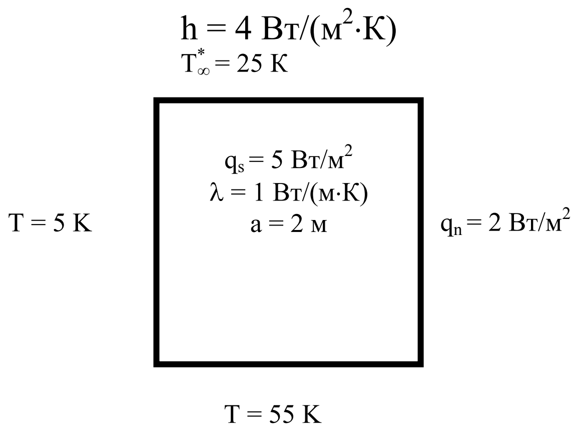
Вариант 13



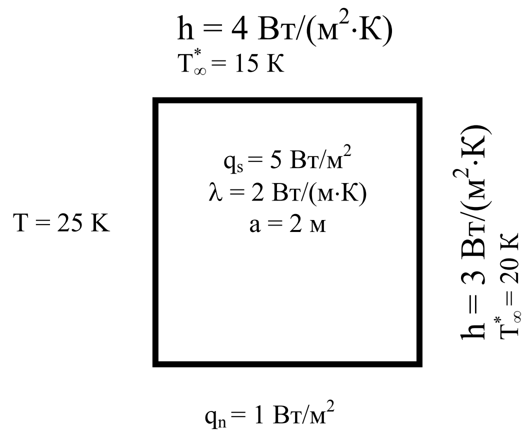
Вариант 14



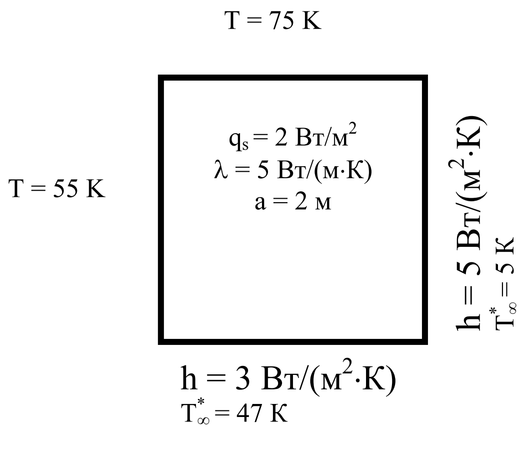
Вариант 15



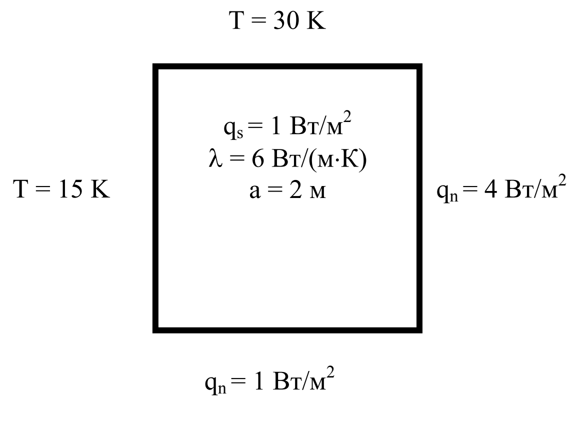
Вариант 16



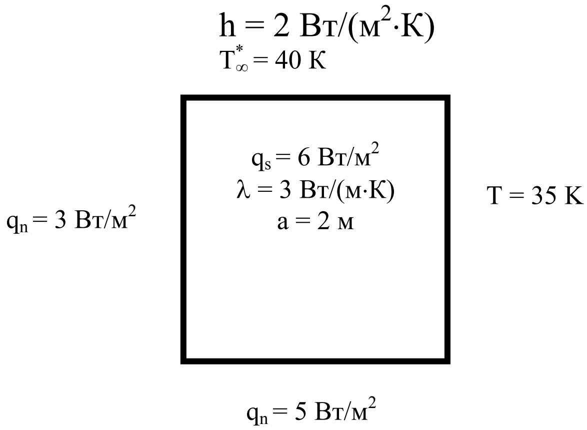
Вариант 17



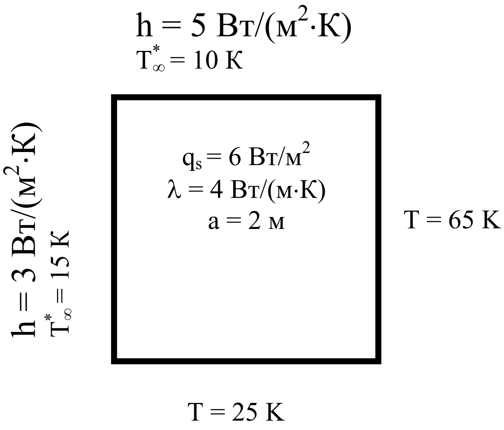
Вариант 18



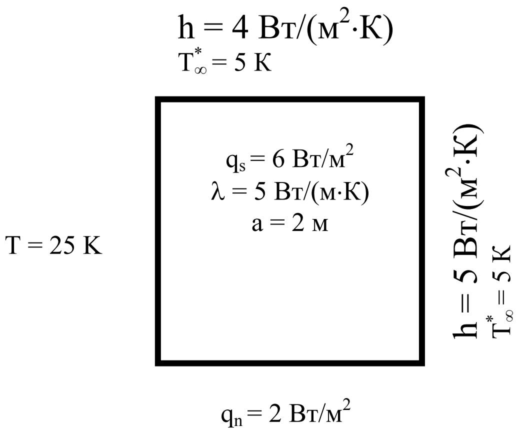
Вариант 19



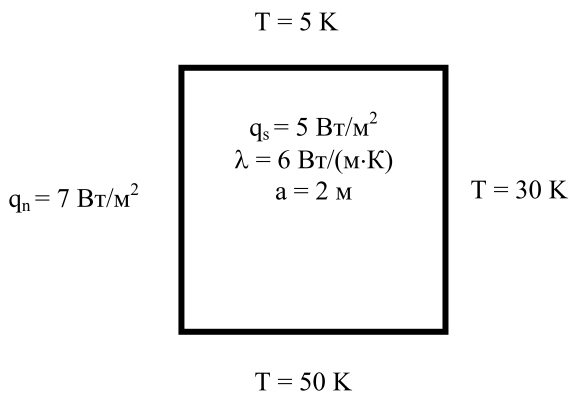
Вариант 20



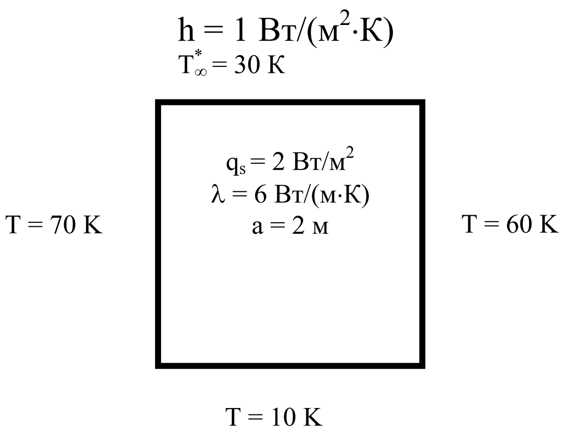
Вариант 21



Вариант 22



Вариант 23



Вариант 24