КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Игудесман К.Б.

ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ЧАСТЬ 1.

Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия»

Казань — 2003

Печатается по решению учебно-методической комиссии механико-математического факультета КГУ

Игудесман К.Б. Задачи по аналитической геометрии. Часть 1. Казань, 2003. 63 с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук Шурыгин В.В.

Учебное пособие предназначено для студентов I курса механико-математического факультета КГУ

Предисловие

В настоящем "Пособии" подобраны и методически распределены задачи по аналитической геометрии.

В начале каждого параграфа приведены формулы, определения и другие краткие пояснения теории, необходимые для решения последующих задач.

В конце каждого параграфа приведены (после черты) задачи для повторения. Эта особенность поможет преподавателю в подборе задач для работы в классе и для домашних заданий или для повторений перед контрольными работами.

1 Векторы на плоскости и в пространстве

Вектором называется упорядоченная пара точек, т. е. пара точек, взятых в определенном порядке. Первая точка называется *началом вектора*, вторая его *концом*. Если обе точки совпадают, то вектор называется *нулевым*.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ не равного нулю, называется длина отрезка AB. Модуль нуль-вектора равен нулю по определению. Если модуль вектора равен 1, то вектор называется *единичным*.

Два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, если они коллинеарны, направлены в одну сторону и их модули равны.

Суммой $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор, который строится так: от произвольной точки O откладывают вектор $\mathbf{a}$, от конца отложенного вектора $\mathbf{a}$ откладывают вектор $\mathbf{b}$. Точка O будет началом вектора $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, а конец вектора $\mathbf{b}$ концом вектора $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Вектором $-\mathbf{a}$, противоположным вектору $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, называется вектор, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$, имеющий тот же модуль и направленный в сторону, противоположную $\mathbf{a}$. Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то $-\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Свойства сложения:

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} \text{ (ассоциативность);}$$
$$\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{a};$$
$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0};$$
$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a} \text{ (коммутативность).}$$

Произведением $\lambda\mathbf{a}$ *числа* $\lambda \neq 0$ *на вектор* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ называется вектор, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$, модуль которого равен $|\lambda|\ |\mathbf{a}|$ и который направлен в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{a}$, если $\lambda > 0$, и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$ или $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Свойства умножения вектора на число:

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a},$$
$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a},$$
$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},$$
$$(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}.$$

ЗАДАЧИ

1. Векторы $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD} = b$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$, являющиеся сторонами этого параллелограмма.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3. Точки E и P служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EP} = \frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2}$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

4. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна 0.

5. В треугольнике найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна 0.

6. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

7. На трех некомпланарных векторах

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}, \quad \overrightarrow{AD} = \mathbf{q}, \quad \overrightarrow{AA'} = \mathbf{r}$$

построен параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Выразить через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ векторы, совпадающие с ребрами, диагональю параллелепипеда и диагоналями граней этого параллелепипеда, для которых вершина A' служит началом.

8. Дан тетраэдр $OABC$. Полагая $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, выразить через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$, где M, P

и R — середины ребер OA, OB и OC, а N, Q и S — середины соответственно противоположных ребер.

---

9. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK} = \mathbf{k}$ и $\overrightarrow{AL} = \mathbf{l}$, выразить через векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

10. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

11. Векторы $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$ и $\overrightarrow{AF} = \mathbf{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразить через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, идущие по сторонам этого шестиугольника.

12. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки плоскости в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

13. В параллелограмме найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам параллелограмма, была равна $\mathbf{0}$.

14. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

15. В тетраэдре $ABCD$ даны ребра, выходящие из вершины A:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{AC} = \mathbf{c},\ \overrightarrow{AD} = \mathbf{d}.$$

Выразить через эти векторы остальные ребра тетраэдра, медиану $\overrightarrow{DM}$ грани BCD и вектор $\overrightarrow{AQ}$, где Q — центр тяжести грани BCD.

16. В четырехугольнике $ABCD$ (плоском или пространственном) положим $\overrightarrow{AB} = \mathbf{m}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{n}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{q}$. Найти вектор $\overrightarrow{EF}$, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

17. На векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ построен параллелепипед. Доказать, что диагональ OD проходит через центр тяжести E треугольника ABC.

2 Радиус-вектор

Радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки M называется вектор $\overrightarrow{OM}$, где O — фиксированная точка.

ЗАДАЧИ

18. Даны радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин A, B и C параллелограмма. Найти радиус-вектор четвертой вершины D.

19. Зная радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вершин треугольника, найти радиус-вектор точки пересечения его медиан.

20. Даны три последовательные вершины трапеции $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$. Найти радиусы-векторы: $\mathbf{r}_4$ четвертой вершины D, $\mathbf{r}'$ точки пересечения диагоналей и $\mathbf{r}''$ точки пересечения боковых сторон, зная, что основание AD в λ раз больше основания BC.

21. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Доказать, что в этой же точке пересекаются и прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней.

---

22. Зная радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки пересечения диагоналей параллелограмма.

23. Зная радиусы-векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_D$ и $\mathbf{r}_{A'}$ четырех вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, найти радиусы-векторы четырех остальных его вершин.

24. Радиусы-векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{r}_2$ и $\overrightarrow{OC} = \mathbf{r}_3$ служат ребрами параллелепипеда. Найти радиус-вектор точки пересечения диагонали параллелепипеда, выходящей из вершины O, с плоскостью, проходящей через вершины A, B и C.

3 Координаты векторов

Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k$ *с коэффициентами* $\lambda^1,\ \lambda^2,\ \ldots,\ \lambda^k$ называется вектор

$$\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k.$$

Линейная комбинация, все коэффициенты которой равны нулю: $\lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^k = 0$, называется *тривиальной*.

Векторы $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулю:

$$\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Если же равна нулю только тривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k$, эти векторы называются *линейно независимыми*.

Упорядоченная пара $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2$ неколлинеарных векторов называется *базисом на плоскости*.

Координатами вектора $\mathbf{a}$ *по отношению к базису* $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2$ называются числа $X,\ Y$, такие, что $\mathbf{a} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$.

Два вектора $\mathbf{a} = \{X,\ Y\},\ \mathbf{b} = \{X',\ Y'\}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты: $X = X'$, $Y = Y'$.

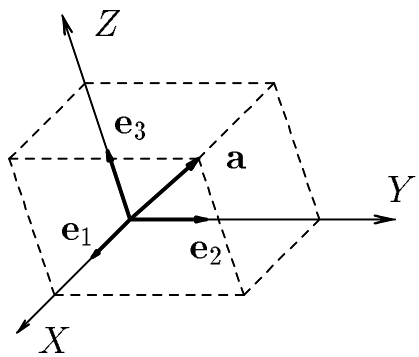
Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $\mathbf{a} = \{X,\ Y\} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{b} = \{X',\ Y'\} \neq \mathbf{0}$ является пропорциональность их соответствующих координат: $X' = \lambda X,\ Y' = \lambda Y$.

Если $\mathbf{a} = \{X,\ Y\}$, $\mathbf{b} = \{X',\ Y'\}$, то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{X + X',\ Y + Y'\},$$
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \{X - X',\ Y - Y'\},$$
$$\lambda\mathbf{a} = \{\lambda X,\ \lambda Y\}.$$

Упорядоченная тройка $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ некомпланарных векторов называется *базисом в пространстве.*

Равенство, коллинеарность, произведение вектора на число, сумма векторов в пространстве определяются аналогично плоскости, с той лишь разницей, что в пространстве вектор имеет не две, а три координаты $\mathbf{a} = \{X,\ Y,\ Z\}$.



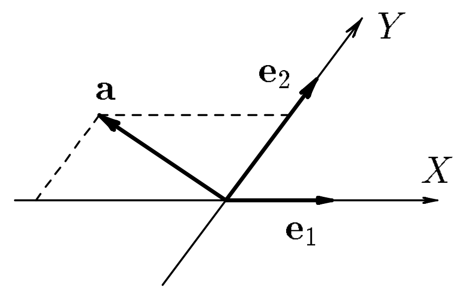


Рис. 1.

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\mathbf{a} = \{X,\ Y,\ Z\}$, $\mathbf{b} = \{X',\ Y',\ Z'\}$, $\mathbf{c} = \{X'',\ Y'',\ Z''\}$ является равенство

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix} = 0.$$

ЗАДАЧИ

25. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{2,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{-3,\ 1\}$, $\mathbf{c} = \{5,\ -2\}$. Найти векторы 1) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$; 2) $\mathbf{a} + 24\mathbf{b} + 14\mathbf{c}$.

26. Представить вектор $\mathbf{c}$ как линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\mathbf{a} = \{4,\ -2\},\ \mathbf{b} = \{3,\ 5\},\ \mathbf{c} = \{1,\ -7\}$;

2) $\mathbf{a} = \{5,\ 4\},\ \mathbf{b} = \{-3,\ 0\},\ \mathbf{c} = \{19,\ 8\}$;

3) $\mathbf{a} = \{-6,\ 2\},\ \mathbf{b} = \{4,\ 7\},\ \mathbf{c} = \{9,\ -3\}$.

27. Установить, в каких из нижеследующих случаев тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор $\mathbf{c}$ как линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

1) $\mathbf{a} = \{5,\ 2,\ 1\},\ \mathbf{b} = \{-1,\ 4,\ 2\},\ \mathbf{c} = \{-1,\ -1,\ 6\}$;

2) $\mathbf{a} = \{6,\ 4,\ 2\},\ \mathbf{b} = \{-9,\ 6,\ 3\},\ \mathbf{c} = \{-3,\ 6,\ 3\}$;

3) $\mathbf{a} = \{6,\ -18,\ 12\},\ \mathbf{b} = \{-8,\ 24,\ -16\},\ \mathbf{c} = \{8,\ 7,\ 3\}$.

28. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки E и F делят сторону AB на три равные части, а точки K, L и M сторону BC на четыре равные части. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{DE} = \mathbf{e}_1$ и $\overrightarrow{FM} = \mathbf{e}_2$, найти координаты вектора $\overrightarrow{AK}$.

---

29. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{5,\ 3\}$, $\mathbf{b} = \{2,\ 0\}$, $\mathbf{c} = \{4,\ 2\}$. Подобрать числа α и γ так, чтобы три вектора $\alpha\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\gamma\mathbf{c}$ составили треугольник, если начало вектора $\mathbf{b}$ совместить с концом вектора $\alpha\mathbf{a}$, а начало вектора $\gamma\mathbf{c}$ с концом вектора $\mathbf{b}$.

30. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{5,\ 7,\ 2\}$, $\mathbf{b} = \{3,\ 0,\ 4\}$, $\mathbf{c} = \{-6,\ 1,\ -1\}$. Найти векторы 1) $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$; 2) $5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$.

31. Представить вектор $\mathbf{d}$ как линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\mathbf{a} = \{2,\ 3,\ 1\},\ \mathbf{b} = \{5,\ 7,\ 0\},\ \mathbf{c} = \{3,\ -2,\ 4\},\ \mathbf{d} = \{4,\ 12,\ -3\}$;

2) $\mathbf{a} = \{5,\ -2,\ 0\},\ \mathbf{b} = \{0,\ -3,\ 4\},\ \mathbf{c} = \{-6,\ 0,\ 1\},\ \mathbf{d} = \{25,\ -22,\ 16\}$;

3) $\mathbf{a} = \{3,\ 5,\ 6\},\ \mathbf{b} = \{2,\ -7,\ 1\},\ \mathbf{c} = \{12,\ 0,\ 6\},\ \mathbf{d} = \{0,\ 20,\ 18\}$.

32. Показать, что каковы бы ни были три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и три числа λ, μ, ν, векторы $\lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}$, $\nu\mathbf{b} - \lambda\mathbf{c}$, $\mu\mathbf{c} - \nu\mathbf{a}$ компланарны.

33. Даны четыре вектора $\mathbf{a} = \{1,\ 5,\ 3\}$, $\mathbf{b} = \{6,\ -4,\ -2\}$, $\mathbf{c} =$

$\{0,\ -5,\ 7\}$, $\mathbf{d} = \{-20,\ 27,\ -35\}$. Подобрать числа α, β и γ так, чтобы векторы $\alpha\mathbf{a}$, $\beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

34. Доказать, что стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ параллельны тогда и только тогда, когда отрезок MN, соединяющий середины их сторон, проходит через точку O пересечения диагоналей.

4 Аффинные системы координат на плоскости и в пространстве

Аффинным репером на плоскости называется набор $\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$, состоящий из точки O и векторного базиса $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ на плоскости.

Координатами точки A относительно репера $\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ называются координаты $\{X,\ Y\}$ ее радиуса-вектора $\mathbf{r}_A$ относительно векторного базиса $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ на плоскости.

Таким образом, $\mathbf{r}_A = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$. Чтобы отличать в координатной записи точки от векторов, координаты точек будем заключать в круглые скобки: $A(X,\ Y)$.

Если $A(X,\ Y)$, $B(X',\ Y')$, то $\overrightarrow{AB} = \{X' - X,\ Y' - Y\}$.

Аффинным репером в пространстве называется набор $\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$, состоящий из точки O и векторного базиса $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ пространства.

Координатами точки A относительно репера $\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ называются координаты $\{X,\ Y,\ Z\}$ ее радиуса-вектора $\mathbf{r}_A$ относительно векторного базиса $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ пространства.

Если $A(X,\ Y,\ Z)$, $B(X',\ Y',\ Z')$, то $\overrightarrow{AB} = \{X'-X,\ Y'-Y,\ Z'-Z\}$.

ЗАДАЧИ

35. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин, принимая за начало координат вершину A, за положительное направление оси абсцисс — направление стороны AB, за положительное направление оси ординат — направление диагонали AE, а за единицу масштаба по обеим осям — сторону шестиугольника.

36. В трапеции $ABCD$ нижнее основание AB в три раза больше ее верхнего основания CD. Принимая за начало координат точку A, за положительное направление оси абсцисс — направление основания AB, за положительное направление оси ординат — направление боковой стороны AD, а стороны AB и AD — за единичные отрезки на этих осях, найти координаты вершин трапеции, а также координаты точки O пересечения ее диагоналей и координаты точки S пересечения ее боковых сторон.

37. Даны две вершины параллелограмма $A(-1,\ 3)$, $B(2,\ -1)$. Найти две другие его вершины при условии, что диагонали параллелограмма параллельны осям координат.

38. Дана точка $M(x,\ y,\ z)$. Найти ее проекцию: 1) на ось Ox; 2) на плоскость Oyz.

39. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки E и F делят сторону AB на три равные части, а точки K, L и M сторону BC на четыре равные части. Принимая за начало координат точку E, за базис векторы $\overrightarrow{EK} = \mathbf{e}_1$ и $\overrightarrow{ED} = \mathbf{e}_2$, найти координаты точки M.

---

40. В равнобочной трапеции большее ее основание $AB = 8$, высота равна 3, а угол при основании равен $45°$. Принимая за ось абсцисс прямоугольной системы координат большее основание трапеции, а за ось ординат — перпендикуляр в его середине и выбирая за положительное направление оси ординат то направление этого перпендикуляра, которое идет внутрь трапеции, найти координаты вершин трапеции, точки M пересечения ее диагоналей и точки S пересечения ее боковых сторон.

41. Даны три вершины параллелограмма $A(-2,\ 1)$, $B(1,\ 3)$, $C(4,\ 0)$. Найти четвертую его вершину.

42. Три ребра параллелепипеда, выходящих из одной вершины, приняты за единичные векторы осей координат. Найти в этой системе координаты всех его вершин.

43. Дана точка $M(x,\ y,\ z)$. Найти координаты точки, симметричной с точкой M: 1) относительно начала координат; 2) относительно плоскости Oxy; 3) относительно оси Oz.

5 Простое отношение трех точек на прямой

Простым отношением трех точек ABC, лежащих на прямой и таких, что $B \neq C$, называется следующее число:

$$(ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Это число (ABC) называют также отношением, в котором точка C делит (направленный) отрезок AB.

Если точка C делит отрезок AB в отношении λ, то

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1+\lambda},$$

в координатах на плоскости

$$X_C = \frac{X_A + \lambda X_B}{1+\lambda}, \quad Y_C = \frac{Y_A + \lambda Y_B}{1+\lambda},$$

в пространстве

$$X_C = \frac{X_A + \lambda X_B}{1+\lambda}, \quad Y_C = \frac{Y_A + \lambda Y_B}{1+\lambda}, \quad Z_C = \frac{Z_A + \lambda Z_B}{1+\lambda}.$$

ЗАДАЧИ

44. Доказать, что в каждом из нижеследующих случаев точки A, B, C находятся на одной прямой, и найти простое отношение ABC:

1) $A(2,\ 1)$, $B(-2,\ 5)$, $C(0,\ 3)$;

2) $A(1,\ 6)$, $B(5,\ 10)$, $C(-3,\ 2)$;

3) $A(0,\ 0)$, $B(-3,\ -3)$, $C(1,\ 1)$.

45. Даны две точки $A(3,\ 4)$ и $B(2,\ -1)$. Найти точки пересечения прямой AB с осями координат.

46. Даны середины сторон треугольника $M_1(2,\ 4)$, $M_2(-3,\ 0)$, $M_3(2,\ 1)$. Найти его вершины.

47. Даны две точки $A(-4,\ 2)$, $B(8,\ -7)$. Найти точки C и D, делящие отрезок AB на три равные части.

48. Даны две вершины треугольника: $A(-4,\ -1,\ 2)$ и $B(3,\ 5,\ -16)$. Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина стороны BC — на плоскости Oxz.

49. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Доказать, что в этой же точке пересекаются прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней. Найти отношение, в котором эта точка делит отрезки указанных прямых.

50. (Теорема Менелая). На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC даны точки C_0, A_0 и B_0 такие, что $(BCA_0) = \lambda_1$, $(CAB_0) = \lambda_2$ и $(ABC_0) = \lambda_3$. Доказать, что точки A_0, B_0 и C_0 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.

---

51. Найти координаты точки M, делящей отрезок M_1M_2, ограниченный точками $M_1(2,\ 3)$ и $M_2(-5,\ 1)$, в отношении:

1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = -\frac{1}{2}$; 3) $\lambda = -4$; 4) $\lambda = \frac{1}{3}$.

52. Один из концов отрезка AB находится в точке $A(2,\ 3)$, его серединой служит точка $M(1,\ -2)$. Найти другой конец отрезка.

53. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-4,\ -7)$ и $B(2,\ 6)$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,\ 1)$. Найти две другие вершины параллелограмма.

54. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $C(2,\ 2)$, $D(1,\ 5)$ разделен на три равные части.

55. Найти отношение, в котором каждая из плоскостей координат делит отрезок AB: $A(2,\ -1,\ 7)$ и $B(4,\ 5,\ -2)$.

56. В каком отношении плоскость, проведенная через концы трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной точки, делит диагональ, исходящую из этой же точки?

6 Расстояние между точками

Если базисные векторы $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ на плоскости (соответственно, $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ в пространстве) попарно ортогональны, а модули их равны 1, то система координат называется *прямоугольной*. В этом случае базисные векторы обычно обозначают так: $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ (соответсвенно, $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$).

В прямоугольной системе координат расстояние d между двумя точками $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ,$$

в пространстве

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

ЗАДАЧИ

57. Найти расстояние d между точками A и B в каждом из следующих случаев:

1) $A(4,\ 3)$, $B(7,\ 7)$; 3) $A(12,\ -1)$, $B(0,\ 4)$;

2) $A(3,\ 1)$, $B(-2,\ 4)$; 4) $A(3,\ 5)$, $B(4,\ 6)$.

58. На осях координат найти точки, каждая из которых равноудалена от точек $(1,\ 1)$ и $(3,\ 7)$.

59. Найти центр окружности, проходящей через точку $A(-4,\ 2)$ и касающейся оси Ox в точке $B(2,\ 0)$.

60. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух точек $A(3,\ 1,\ 0)$ и $B(-2,\ 4,\ 1)$.

61. Начало вектора находится в точке $A(2,\ -1,\ 5)$. Длина вектора равна 11. Найти конец этого вектора, зная, что первые две его координаты равны соответственно $x = 7$, $y = 6$.

---

62. Найти расстояние от начала координат каждой из следующих точек: 1) $A(11,\ 4)$; 2) $B(-3,\ -4)$; 3) $C(-11,\ 0)$; 4) $D(5,\ 12)$.

63. На оси Oy найти точку, равноудаленную от точки $(-8,\ -4)$ и от начала координат.

64. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку $A(2,\ -1)$ и касающейся обеих осей координат.

65. Найти в плоскости Oxz точку, равноудаленную от трех точек $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(-1,\ 1,\ 0)$, $C(3,\ 1,\ -1)$.

66. Даны четыре точки $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(5,\ 2,\ 3)$, $C(2,\ 5,\ 3)$, $D(1,\ 2,\ -1)$. Найти центр и радиус сферы, проходящей через эти точки.

7 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением $\mathbf{ab}$ (часто используются обозначения $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ или $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$) двух векторов $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \cos\varphi\ .$$

Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{ab} = \mathbf{0}$ по определению.

Скалярное произведение $\mathbf{ab}$ равно нулю тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ или $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Свойства скалярного умножения:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{ab} = \mathbf{ba}\ (\text{коммутативность})\ ,\\
&\lambda(\mathbf{ab}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b}\ ,\\
&(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}\ (\text{дистрибутивность})\ ,\\
&\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 \geq 0\ ,
\end{aligned}$$

причем $\mathbf{aa} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

ЗАДАЧИ

67. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в каждом из следующих случаев:

1) $|\mathbf{a}| = 8,\ |\mathbf{b}| = 5,\ \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 60°$;

2) $|\mathbf{a}| = 1,\ |\mathbf{b}| = 1,\ \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 135°$;

3) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$;

4) $|\mathbf{a}| = 3,\ |\mathbf{b}| = 6,\ \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$;

5) $|\mathbf{a}| = 3,\ |\mathbf{b}| = 1,\ \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

68. В равнобедренном треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1, проведенные к боковым (равным) сторонам CB и CA, пересекаются под прямым углом. Найти углы этого треугольника.

69. Доказать, что векторы $\mathbf{p} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) - \mathbf{b}(\mathbf{ac})$ и $\mathbf{c}$ перпендикулярны друг другу.

70. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Вычислить $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF})$.

71. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$.

72. Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ два ребра перпендикулярны соответсвенно своим противоположным, то и остальные два ребра взаимно-перпендикулярны.

73. Доказать, что сумма квадратов сторон четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ равна сумме квадратов его диагоналей и учетверенного квадрата расстояния между серединами диагоналей.

---

74. В треугольнике ABC даны длины его сторон $BC = 5$, $CA = 6$, $AB = 7$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

75. Какой угол образуют единичные векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$, если известно, что векторы $\mathbf{p} = \mathbf{s} + 2\mathbf{t}$ и $\mathbf{q} = 5\mathbf{s} - 4\mathbf{t}$ взаимно-перпендикулярны.

76. Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны 1. Полагая $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, вычислить выражение $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$.

77. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M (которая может лежать как в плоскости прямоугольника, так и вне ее). Показать, что:
1) скалярное произведение векторов, идущих от точки M к двум несмежным вершинам прямоугольника, равно скалярному произведению векторов, идущих от той же точки к двум другим вершинам $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$;
2) сумма квадратов векторов одной пары равна сумме квадратов другой пары $(\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2)$.

78. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DB} = \lambda$. Выразить длину отрезка CD через три стороны треугольника и число λ.

79. Доказать, что при любом расположении точек $ABCD$ на плоскости или в пространстве имеет место равенство $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

80. В равнобедренном треугольнике угол против основания равен $\frac{\pi}{6}$. Найти углол между медианами этого треугольника, проведенными к боковым сторонам.

81. Точка M расположена внутри выпуклого n-угольника $P = A_1A_2\dots A_n$. Доказать, что найдется такая сторона A_iA_{i+1} этого n-угольника, что основание перпендикуляра, опущенного из точки M на A_iA_{i+1} является внутренней точкой отрезка A_iA_{i+1}.

8 Скалярное произведение в координатах

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = \{X,\ Y\}$ и $\mathbf{b} = \{X',\ Y'\}$ в произвольной аффинной системе координат на плоскости вычисляется по формуле:

$$\mathbf{ab} = g_{11}XX' + g_{12}(XY' + YX') + g_{22}YY'\ ,$$

где $g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,\ i, j = 1, 2$ — скалярное произведение базисных векторов.

В пространстве:

$$\mathbf{ab} = g_{11}XX' + g_{12}(XY' + YX') + g_{13}(XZ' + ZX')+$$

$$g_{22}YY' + g_{23}(YZ' + ZY') + g_{33}ZZ'\ ,$$

где $g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,\ i, j = \overline{1, 3}$ — скалярное произведение базисных векторов.

В прямоугольной системе координат эти формулы принимают вид:

$$\mathbf{ab} = XX' + YY'$$

на плоскости и

$$\mathbf{ab} = XX' + YY' + ZZ'$$

в пространстве.

ЗАДАЧИ

82. Построить аффинную систему координат, если

1) $g_{11} = 4, \ g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1;$

2) $g_{11} = 1, \ g_{12} = \frac{1}{2}, \quad g_{22} = 1;$

3) $g_{11} = 4, \ g_{12} = 8, \quad g_{22} = 25;$

4) $g_{11} = 4, \ g_{12} = -8, \ g_{22} = 25.$

83. Определить длину вектора $\mathbf{a} = \{56, \ -10\}$, если $g_{11} = 4, \ g_{12} = 8, \ g_{22} = 25$.

84. Определить единичный вектор $\mathbf{b}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{a} = \{7, \ -8\}$, если $g_{11} = 4, \ g_{12} = 8, \ g_{22} = 25$.

85. Длины единичных векторов аффинной системы координат суть соответственно $|\mathbf{e}_1| = 2, \ |\mathbf{e}_2| = \sqrt{3}$, а угол между ними $\omega = \frac{5\pi}{6}$. Относительно этой системы координат даны два вектора $\mathbf{a} = \{1, \ 2\}, \ \mathbf{b} = \{2, \ 2\}$. Найти угол от первого вектора до второго.

86. Относительно аффинной системы координат дан треугольник ABC с вершинами в точках $A(1, \ 1), \ B(5, \ 3), \ C(3, \ 5)$, длины сторон которого суть $AB = \sqrt{52}, \ AC = 4, \ BC = \sqrt{28}$. Определить длины единичных векторов этой системы координат и угол между ними.

87. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими прямоугольными координатами в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\mathbf{a} = \{5, \ 2\}, \quad \mathbf{b} = \{-3, \ 6\};$

2) $\mathbf{a} = \{6, \ -8\}, \ \mathbf{b} = \{12, \ 9\};$

3) $\mathbf{a} = \{3, \ -5\}, \ \mathbf{b} = \{7, \ 4\}.$

88. Определить угол α между двумя векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданными своими прямоугольными координатами в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\mathbf{a} = \{8,\ 4,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{2,\ -2, 1\}$;

2) $\mathbf{a} = \{2,\ 5,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{6,\ 0,\ 3\}$.

89. В правильном тетраэдре $ABCD$ найти угол ψ между медианами BB_1 и CC_1 граней ABC и ACD.

---

90. Определить длину вектора $\mathbf{a} = \{7,\ -8\}$, если $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

91. Даны длины единичных векторов репера $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$ и угол между ними $\omega = \frac{\pi}{3}$. Определить g_{11}, g_{12}, g_{22} и расстояние d между точками $A(1,\ -2)$, $B(-3,\ 4)$.

92. Длины единичных векторов аффинной системы координат суть соответственно $|\mathbf{e}_1| = 4$, $|\mathbf{e}_2| = 2$. Угол между ними $\omega = \frac{\pi}{3}$. Относительно этой системы координат вершины треугольника ABC имеют координаты $A(1,\ 3)$, $B(1,\ 0)$, $C(2,\ 1)$. Определить длины сторон AB и AC этого треугольника и угол A между ними.

93. Относительно аффинной системы координат дан прямоугольный треугольник ABC с вершинами в точках $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(3,\ 2)$, прямым углом при вершине C и катетами $CA = 2$, $CB = 3$. Определить длины сторон $A'B'$ и $A'C'$ треугольника $A'B'C'$ и угол между ними, если вершины этого треугольника имеют координаты $A'(1,\ 1)$, $B'(2,\ 2)$, $C'(2,\ 4)$.

94. Определить угол α между двумя векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданными своими прямоугольными координатами в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\mathbf{a} = \{4,\ 3\}$, $\mathbf{b} = \{1, 7\}$;

2) $\mathbf{a} = \{6,\ -8\}$, $\mathbf{b} = \{12,\ 9\}$;

3) $\mathbf{a} = \{2,\ 5\}$, $\mathbf{b} = \{3, -7\}$;

4) $\mathbf{a} = \{2,\ -6\}$, $\mathbf{b} = \{-3,\ 9\}$.

95. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими прямоугольными координатами в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\mathbf{a} = \{3,\ 5,\ 7\}$, $\mathbf{b} = \{-2,\ 6,\ 1\}$;
2) $\mathbf{a} = \{3,\ 0,\ -6\}$, $\mathbf{b} = \{2,\ -4,\ 0\}$;
3) $\mathbf{a} = \{2,\ 5,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{3,\ -2,\ 4\}$.

96. Найти численную величину проекции вектора $\{8,\ 4,\ 1\}$ на ось, параллельную вектору $\{2,\ -2,\ 1\}$.

97. В треугольнике ABC длины сторон CA и CB равны, соответственно, 4 и 6, а угол при вершине C равен $\frac{\pi}{6}$. 1) Найти угол φ между медианами AA_1 и BB_1. 2) Найти длину медианы CC_1.

9 Поворот вектора на ориентированной плоскости

Пусть $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ — ортонормированный репер на плоскости. Вектор $\mathbf{e}(\varphi)$, получающийся поворотом вектора $\mathbf{i}$ на угол φ, имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi.$$

Используя этот вектор, произвольный вектор $\mathbf{a} = \{X,\ Y\}$ можно представить в виде:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}(\varphi),$$

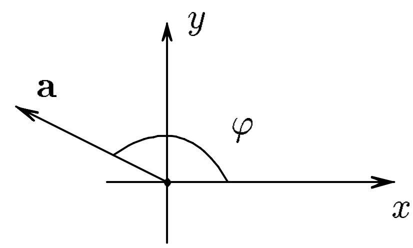


Рис. 2.

где φ — угол, на который нужно повернуть вектор $\mathbf{i}$, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\mathbf{a}$. При этом

$$X = |\mathbf{a}|\cos\varphi, \quad Y = |\mathbf{a}|\sin\varphi.$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{b} = \{X',\ Y'\}$, полученный поворотом вектора

$\mathbf{a}$ на угол α. Тогда $\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}(\varphi + \alpha)$, в координатах

$$\begin{cases} X' &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ Y' &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha\ . \end{cases}$$

В частном случае, вектор, полученный поворотом вектора $\mathbf{a}$ на угол $\frac{\pi}{2}$, будем обозначать $[\mathbf{a}]$, в координатах $[\mathbf{a}] = \{-Y,\ X\}$.

ЗАДАЧИ

98. Даны две точки $A(2,\ 1)$ и $B(5,\ 5)$. Найти конец вектора $\overrightarrow{AC}$, получающегося из вектора $\overrightarrow{AB}$ поворотом на угол $\frac{5\pi}{6}$.

99. Даны две соседние вершины квадрата $A(-3,\ 2)$ и $B(2,\ 4)$. Найти две другие вершины.

100. Основанием равнобедренного треугольника служит отрезок AC : $A(-4,\ 2)$, $C(4,\ -4)$. Найти координаты вершины B этого треугольника, зная, что углы при его основании равны $\operatorname{arctg}\frac{5\pi}{6}$.

101. Определить координаты k-ой вершины правильного n-угольника, если даны координаты первой вершины $A_1(x_1,\ y_1)$ и координаты центра $S(x_0,\ y_0)$.

102. Составить уравнения траектории, описываемой точкой M, лежащей на окружности ω радиуса R, катящейся без скольжения по данной прямой ℓ (циклоида).

103. Круг радиуса r катится по кругу радиуса R, оставаясь внутри него. Написать параметрические уравнения линии, описываемой точкой катящегося круга (гипоциклоида).

104. По окружности ω, заданной уравнением $x^2+y^2 = R^2$, катится без скольжения прямая ℓ, начальное положение которой $x = R$. Составить уравнения траектории, описываемой точкой M, лежащей на ℓ, принимая за начальное ее положение точку $M_0(R;0)$. (эвольвента окружности).

---

105. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-3,\ 2)$ и $B(5,\ -4)$. Найти две другие вершины.

106. Даны две вершины равностороннего треугольника $A(2,\ 1)$, $B(6,\ 3)$. Найти его третью вершину.

107. Векторы $\overrightarrow{A_0A_1},\ \overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_2A_3}$ имеют длины $a_1,\ a_2,\ a_3$ и образуют углы $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ с положительным направлением оси Ox. Определить координаты вектора $\overrightarrow{A_0A_3}$.

108. Векторы $\overrightarrow{A_0A_1},\ \overrightarrow{A_1A_2},\dots,\ \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ имеют длины $d_1,\ d_2,\dots,\ d_n$ и образуют углы $\phi_1,\ \phi_2,\dots,\ \phi_n$ с положительным направлением оси Ox. Определить координаты точки A_n, если $A_0(x_0,\ y_0)$.

109. Круг радиуса r катится по кругу радиуса R, оставаясь вне его. Найти параметрические уравнения линии, описываемой точкой катящегося круга (эпициклоида), принимая за начало координат центр неподвижного круга, а за параметр угол t между положительным направлением оси абсцисс и с радиусом неподвижного круга, идущим в точку касания подвижного круга с неподвижным. В начальном положении подвижная окружность касалась неподвижной в точке A пересечения последней с осью абсцисс.

10 Косое произведение векторов на плоскости

Косым произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на ориентированной плоскости называется следующее число:

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= [\mathbf{a}]\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\phi\ ,$$

где ϕ — угол от вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$. Таким образом, $|< \mathbf{a}, \mathbf{b} >|$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Свойства косого произведения:

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= - < \mathbf{b}, \mathbf{a} > \quad (\text{кососимметричность}) ,$$

$$\lambda < \mathbf{a}, \mathbf{b} >=< (\lambda\mathbf{a}), \mathbf{b} > ,$$

$$< (\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbf{c} >=< \mathbf{a}, \mathbf{c} > + < \mathbf{b}, \mathbf{c} > \quad (\text{дистрибутивность}) .$$

Косое произведение векторов $\mathbf{a} = \{X,\ Y\}$ и $\mathbf{b} = \{X',\ Y'\}$ в произвольной аффинной системе координат на плоскости вычисляется по формуле:

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= \varepsilon_{12} \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}$$

где $\varepsilon_{12} =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 >$ — косое произведение базисных векторов. В прямоугольной системе координат

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}$$

Имеет место следующая формула для площади треугольника ABC на плоскости:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} | < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} > | = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_B - X_A & Y_B - Y_A \\ X_C - X_A & Y_C - Y_A \end{vmatrix}$$

ЗАДАЧИ

110. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого служат точки $A(4,\ 2)$, $B(9,\ 4)$ и $C(7,\ 6)$.

111. Вычислить площадь пятиугольника, вершинами которого служат точки $A(-2,\ 0)$, $B(0,\ -1)$, $C(2,\ 0)$, $D(3,\ 2)$ и $E(-1,\ 3)$.

112. Найти расстояние от точки $(2,\ 0)$ до прямой, проходящей через точки $(1,\ 1)$ и $(5,\ 4)$.

113. Две вершины треугольника находятся в точках $(5,\ 1)$ и $(-2,\ 2)$, третья вершина — на оси Ox. Зная, что площадь треугольника равна 10, найти третью вершину.

———————————————

114. Вычислить площадь треугольника ABC в каждом из следующих случаев:

1) $A(2,\ 1)$, $B(3,\ 4)$, $C(1,\ 6)$;

2) $A(-2,\ 4)$, $B(0,\ -3)$, $(1,\ 7)$;

3) $A(5,\ 4)$, $B(11,\ 0)$, $C(0,\ 3)$.

115. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через точки $(1,\ 5)$ и $(2,\ 4)$.

116. Площадь треугольника $S = 3$, две его вершины суть точки $A(3,\ 1)$ и $B(1,\ -3)$, центр тяжести этого треугольника лежит на оси Ox. Определить координаты третьей вершины C.

11 Полярная система координат на плоскости

Полярная система координат на плоскости определяется точкой O (полюс), исходящим из нее лучом Ox (полярная ось), масштабным отрезком e и направлением отсчета углов.

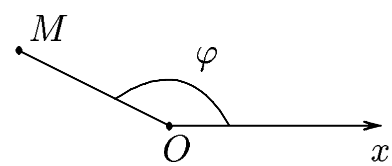


Рис. 3.

Полярными координатами точки M, не совпадающей с полюсом, называются: расстояние ρ (полярный радиус) от точки M до полюса O и угол φ (полярный угол) от полярной оси Ox до луча OM.

Если полюс O принять за начало декартовой прямоугольной системы координат, направление полярной оси — за положительное направление оси Ox, то между декартовыми координатами x и y точки и ее полярными координатами ρ и φ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}.$$

ЗАДАЧИ

117. Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Взяв за полюс одну из его вершин, а за полярную ось — сторону, через нее проходящую, определить полярные координаты остальных пяти вершин.

118. Вычислить расстояние между двумя данными точками:
1) $A(2,\ \frac{\pi}{12})$ и $B(1,\ \frac{5\pi}{12})$;
2) $C(4,\ \frac{\pi}{5})$ и $D(6,\ \frac{6\pi}{5})$;
3) $E(3,\ \frac{11\pi}{18})$ и $F(4,\ \frac{4\pi}{9})$.

119. Вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $(4,\ \frac{\pi}{9})$, $(1,\ \frac{5\pi}{18})$.

120. Найти полярные координаты точки M, зная ее декартовы координаты $x = 8,\ y = -6$.

121. Написать в полярных координатах уравнение прямой, перпендикулярной к полярной оси и отсекающей на ней отрезок $OA = a$.

122. Даны точка O и прямая, находящаяся от точки O на расстоянии $OA = a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий данную прямую в переменной точке B. На этом луче по обе стороны от точки B откладываются отрезки $BM_1 = BM_2 = b$. Написать в полярных координатах уравнение линии (конхоида Никомеда), описываемой точками M_1 и M_2, при вращении луча, принимая за полюс точку O, а за полярную ось перпендикуляр OA, опущенный из точки O на данную прямую.

123. На окружности радиуса a дана точка O. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность в переменной точке A. На этом луче по обе стороны от точки A откладываются отрезки $AM_1 = AM_2 = 2a$. Линия, описываемая точками M_1 и M_2, называется кардиоидой. Написать уравнение этой линии в полярных координатах, принимая за полюс точку O, а за полярную ось проходящий через нее диаметр OK.

---

124. Относительно полярной системы координат дана точка $A(5,\ \frac{2\pi}{3})$. Найти:

1) точку B, симметричную точке A относительно полюса;

2) точку C, симметричную точке A относительно полярной оси.

125. Найти прямоугольные координаты точек, которые даны своими полярными координатами: $A(2,\ \frac{\pi}{3})$, $B(\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4})$, $C(5,\ \frac{\pi}{2})$, $D(3,\ -\frac{\pi}{6})$, причем ось абсцисс совпадает с полярной осью, а начало координат — с полюсом.

126. Написать уравнение окружности радиуса a в полярных координатах, приняв за полюс точку O на окружности, а за полярную ось проходящий через нее диаметр OA.

127. Даны точка O и прямая, находящаяся от точки O на расстоянии $OA = a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий прямую в переменной точке B. На этом луче по обе стороны от точки B откладываются равные отрезки $BM_1 = BM_2 = AB$. Написать уравнение линии (строфоида), описываемой точками M_1 и M_2, при вращении луча, в полярных координатах, принимая за полюс точку O, а за полярную ось перпендикуляр OA, опущенный из точки O на данную прямую.

128. На окружности радиуса a взята точка O и через точку K, диаметрально противоположную O, к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность и касательную соответственно в точках A и B. На этом луче от точки O откладывается отрезок OM, равный отрезку AB луча, заключенному между окружностью и касательной. Линия, описываемая точкой M при вращении луча, называется циссоидой Диоклеса. Написать ее уравнение в полярных координатах, принимая за полюс точку O и за полярную ось диаметр OK.

129. На окружности радиуса a взята точка O. Через точку K диаметрально противоположную O, к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается прямая, пересекающая окружность и касательную соответственно в точках A и B. Из точки A проводится прямая, параллельная касательной, а из точки B — прямая, параллельная диаметру OK. Найти геометрическое место точек пересечения этих прямых (верзьера Марии Аньези), принимая за начало прямоугольной системы координат точку O, а за ось абсцисс диаметр OK.

130. Вокруг точки O вращается луч с постоянной угловой скоростью ω. По этому лучу движется точка M с постоянной скоростью v. Составить уравнение линии, описываемой точкой M, в полярных координатах, если в начальный момент движения луч совпадает с полярной осью, а точка M — с точкой O. Линия, описываемая точкой M, называется спиралью Архимеда.

12 Прямая линия на аффинной плоскости

Общим уравнением прямой на аффинной плоскости называется уравнение вида:

$$Ax + By + C = 0 \ ,$$

при этом вектор $\{-B,\ A\}$ параллелен прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_1,\ y_1)$ параллельно вектору $\{l,\ m\}$, может быть записано так:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ l & m \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}\ ,$$

последнее уравнение называется *каноническим уравнением прямой*.

Если заданы произвольная точка $(x_1,\ y_1)$ и произвольный вектор $\{l,\ m\}\neq\mathbf{0}$, то *параметрические уравнения прямой*, проходящей через данную точку параллельно данному вектору, будут:

$$\begin{aligned} x &= x_1+lt \\ y &= y_1+mt\ . \end{aligned}$$

Уравнение прямой, не проходящей через начало координат и пересекающей оси координат в точках $(a,\ 0)$ и $(0,\ b)$ может быть записано в виде (*уравнение прямой в отрезках*):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ .$$

Если прямая задана своим общим уравнением, то для координат всех точек, лежащих по одну сторону от нее,

$$Ax+By+C>0\ ,$$

а для координат $x,\ y$ всех точек, лежащих по другую сторону от нее,

$$Ax+By+C<0\ .$$

ЗАДАЧИ

131. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $(3,\ -2)$ параллельно осям координат.

132. Дан треугольник ABC : $A(-2,\ 3)$, $B(4,\ 1)$, $C(6,\ -5)$. Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A.

133. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки 3 и 5.

134. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (3, -5) параллельно вектору {-4, 2}.

135. Написать в параметрической форме уравнения следующих прямых:

1) $3x + 6y + 5 = 0$; 4) $x = 2$;
2) $x - 2y - 4 = 0$; 5) $y = -3$;
3) $y = -3x + 5$; 6) $2x + 3y = 0$.

136. Записать в виде $Ax + By + C = 0$ уравнения следующих прямых: 1) $x = t$; $y = 1 - 3t$; 2) $x = 2 + 5t$; $y = 4 - 7t$.

137. Установить, какие из нижеследующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $x + y - 3 = 0$, $2x + 3y - 8 = 0$;
2) $x - y + 5 = 0$, $2x - 2y + 3 = 0$;
3) $x - 2y + 4 = 0$, $-2x + 4y - 8 = 0$;
4) $x + y + 5 = 0$, $2x + 3y + 10 = 0$;
5) $2x + 3y - 1 = 0$, $4x + 6y - 7 = 0$;
6) $x - 5y = 0$, $2x - 10y = 0$;
7) $7x + 9y - 62 = 0$, $8x + 3y + 2 = 0$;
8) $x + 2 = 0$, $2x + 3 = 0$;
9) $x - y\sqrt{3} = 0$, $x\sqrt{3} - 3y = 0$.

138. Установить, какие из нижеследующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $x = 3 + t$, $y = 2 - t$; $x = 3t$, $y = -2t$;
2) $x = 5 + 4t$, $y = -2 - 2t$; $x = 1 - 2t$, $y = 7 + t$;
3) $x = 4 - 8t$, $y = 2 + 6t$; $x = -4 + 4t$, $y = 8 - 3t$.

139. Даны середины $M_1(2,\ 3)$, $M_2(-1,\ 2)$ и $M_3(4,\ 5)$ сторон треугольника. Составить уравнения сторон.

140. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,\ -1)$. Написать, уравнение двух других сторон параллелограмма.

141. В каком отношении прямая $2x - y + 5 = 0$ делит отрезок, начало которого находитсь в точке (-5, 4), а конец — в точке (2, 1)?

142. Доказать, что прямая $5x - y - 5 = 0$ пересекает отрезок прямой $3x - 2y - 6 = 0$, заключенный между осями координат.

143. Определить положение прямой $x - 7y + 5 = 0$ относительно треугольника, вершины которого $A(3,\ 1)$, $B(-2,\ 4)$, $C(1,\ 0)$.

---

144. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку (-1, -8).

145. Составить параметрические уравнения прямой, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки 3 и -5.

146. Установить, какие из нижеследующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $3x + 4y + 5 = 0, \quad x = -3 + 4t, \quad y = 1 - 3t;$
2) $2x - 5y - 7 = 0, \quad x = 2 + t, \quad y = -9 - t;$
3) $6x - 3y + 5 = 0, \quad x = 5 + t, \quad y = -3 + 2t;$
4) $2x + 5y - 38 = 0, \quad x = -2 + 2t, \quad y = -9 + 5t;$
5) $3x + 9y + 5 = 0, \quad x = 2 + 3t, \quad y = -t;$
6) $4x + 5y - 6 = 0, \quad x = -6 + 5t, \quad y = 6 - 4t.$

147. Через точку (7, 4) провести прямую, параллельную прямой $3x - 2y + 4 = 0$.

148. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-8,\ 1)$ параллельно прямой $x + y + 7 = 0$.

149. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x - 3y = 0$ и $2x + 5y + 6 = 0$ и одну из его вершин $C(4,\ -1)$ составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

150. Даны вершины треугольника: $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ -1)$ и $C(0,\ 4)$. Через каждую из них провести прямую, параллельную противолежащей стороне.

151. Составить уравнения сторон параллелограмма $ABCD$, зная, что его диагонали пересекаются в точке $M(1,\ 6)$, а стороны AB, BC, CD и DA проходят соответственно через точки $P(3,\ 0)$, $Q(6,\ 6)$, $R(5,\ 9)$, $S(-5,\ 4)$.

152. В параллелограмме $ABCD$ даны уравнения сторон $AB:$ $3x+4y-12=0$ и $AD:\ 5x-12y-6=0$ и точка $E(-2,\ \frac{13}{6})$ — середина стороны BC. Найти уравнения других сторон параллелограмма.

153. Даны две точки $A(-3,\ 1)$ и $B(5,\ 4)$ и прямая $x-2y=0$. Доказать, что данная прямая пересекает продолжение отрезка AB за точку B.

154. Определить положение точек $A(3,\ 1)$, $B(7,\ -6)$, $C(-1,\ 1)$, $D(3,\ 2)$ относительно треугольника, уравнения сторон которого $2x-y+2=0,\ x+y-4=0,\ 2x+y=0$.

13 Уравнение пучка прямых

Совокупность прямых, проходящих через одну точку $M(x_0,\ y_0)$, называется *пучком прямых.* Точка $M(x_0,\ y_0)$ при этом называется *центром пучка.* Очевидно, пучок прямых с центром $M(x_0,\ y_0)$ задается уравнением

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Пусть даны две пересекающиеся (различные) прямые ℓ_1 и ℓ_2, заданные, соответственно, уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$. Любая прямая, проходящая через точку пересечения двух данных прямых может быть определена уравнением вида:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

при некоторых λ и μ, не равных нулю одновременно. Последнее уравнение называют уравнением пучка прямых.

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2, заданные, соответственно, уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ параллельны (но не совпадают), то всякая прямая, имеющая уравнение

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

при некоторых λ и μ, параллельна ℓ_1 и ℓ_2. Всю совокупность прямых при этом также называют пучком (несобственным) прямых.

ЗАДАЧИ

155. Определить взаимное расположение прямых в каждой из следующих троек прямых:

1) $2x + y - 3 = 0, \quad 3x - 2y + 5 = 0, \quad 5x - y + 2 = 0;$
2) $x - 2y + 3 = 0, \quad 2x - 4y + 7 = 0, \quad 3x - 6y + 4 = 0;$
3) $x + 4y - 5 = 0, \quad x - 2y + 7 = 0, \quad x + 3 = 0;$
4) $y - 5 = 0, \quad y + 2 = 0, \quad y = 0;$
5) $x - y + 3 = 0, \quad 2x - 2y + 7 = 0, \quad 4x - 4y + 1 = 0;$
6) $2x + 3y + 5 = 0, \quad x - y + 1 = 0, \quad 3x - 4y - 12 = 0;$
7) $3x + 2y + 6 = 0, \quad 9x + 6y - 5 = 0, \quad 5x - y + 3 = 0.$

156. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых: $7x - y + 3 = 0$ и $3x + 5y - 4 = 0$, и через точку $A(2,\ -1)$.

157. Через точку пересечения прямых $2x - 6y + 3 = 0$, $5x + y - 2 = 0$ провести прямые, параллельные осям координат.

158. (Теорема Чевы). На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC даны точки C_0, A_0 и B_0 такие, что $(BCA_0) = \lambda_1$, $(CAB_0) = \lambda_2$

и $(ABC_0) = \lambda_3$. Доказать, что прямые AA_0, BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

---

159. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + y - 3 = 0$, $7x - 4y + 2 = 0$.

160. Через точку пересечения прямых $3x - 5y + 2 = 0$, $5x - 2y + 4 = 0$ провести прямую, параллельную прямой $2x - y + 4 = 0$.

161. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения пар прямых $2x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ и $x + 2y = 0$, $3x - 7y + 4 = 0$.

14 Прямая в прямоугольной системе координат

Для прямой ℓ, имеющей уравнение $Ax + By + C = 0$ в прямоугольной системе координат, вектор $\mathbf{N} = \{A,\ B\}$ является нормальным вектором, а вектор $\mathbf{a} = \{-B,\ A\}$ направляющим вектором.

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы, соответственно, уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то косинус угла между ними равен

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\ .$$

Расстояние d от точки $M(x_0,\ y_0)$ до прямой, заданной относительно прямоугольной системы координат уравнением $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\ .$$

Пусть α — угол от положительного направления оси Ox до луча OP, проходящего через начало координат, перпендикулярного к прямой AB и пересекающего эту прямую, а p — расстояние от начала координат до прямой AB. Тогда уравнение прямой AB может быть записано в виде:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \ .$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением прямой.*

ЗАДАЧИ

162. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (7, 4) перпендикулярно к прямой $3x - 2y + 4 = 0$.

163. Даны вершины треугольника: $A(4,\ 6)$, $B(-4,\ 0)$ и $C(-1,\ -4)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

164. Найти проекцию точки (-5, 6) на прямую $7x - 13y - 105 = 0$.

165. Найти точку, симметричную точке $M(-2,\ 9)$ относительно прямой $2x - 3y + 18 = 0$.

166. Определить углы между двумя прямыми, если известны их угловые коэффициенты $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$.

167. Составить уравнение биссектрисы угла $\angle A$ треугольника ABC с вершинами $A(3,\ 1)$, $B(0,\ -3)$ и $C(7,\ 4)$.

168. Найти расстояния от точек (3, 1), (2, -4), (5, -1), (0, -3), (0, 0) до прямой $3x + 4y = 0$.

169. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $7x - 2y + 4 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $\sqrt{53}$.

170. Найти расстояние от точки $M(2,\ 1)$ до прямой ℓ, заданной уравнением $2x - 3y - 5 = 0$ в некоторой аффинной системе координат, если известны $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

171. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (принадлежат одному пучку прямых).

---

172. Установить, какие из нижеследующих пар прямых будут взаимно перпендикулярны:

1) $x - 2y + 3 = 0, \qquad 2x + y - 5 = 0;$

2) $2x + 3y - 6 = 0, \qquad 2x - 3y + 4 = 0;$

3) $3x + 7y + 4 = 0, \qquad 7x - 3y + 2 = 0;$

4) $5x + 6y - 8 = 0, \qquad 6x + 5y + 2 = 0;$

5) $x - y = 0, \qquad x + y = 0;$

6) $x + 3 = 0, \qquad y - 2 = 0.$

173. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x + 7y = 0$.

174. На прямой $x - 3y + 1 = 0$ найти точку, равноудаленную от двух точек (-3, 1) и (5, 4).

175. Даны две вершины треугольника $A(-6,\ 2)$, $B(2,\ -2)$ и точка $H(1,\ 2)$ пересечения его высот. Вычислить координаты третьей вершины C.

176. Через точку (3, 1) провести прямые, наклоненные к прямой $2x + 3y - 1 = 0$ под углом 45°.

177. Определить расстояния от точек (1, 0) и (-1, 2) до прямой $3x - y + 4 = 0$.

178. Доказать, что прямые $3x - 7y + 2 = 0$, $3x - 7y + 3 = 0$ параллельны, и найти расстояние и между ними.

179. Центр симметрии квадрата находится в точке (-1, 0); уравнение одной из его сторон $x + 3y - 5 = 0$. Составить уравнения трех других сторон.

15 Окружность

Уравнение окружности с центром в точке $C(a,\ b)$ и радиусом r относительно прямоугольной системы координат имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\ .$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением* окружности.

Уравнение *касательной к окружности* в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ имеет вид:

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0\ .$$

ЗАДАЧИ

180. Определить координаты центра S и радиус r каждой из следующих окружностей:
1) $x^2 + y^2 - 6x = 0$;
2) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$;
3) $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$;
4) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$.

181. Составить уравнение окружности, проходящей через точки (2, 1) и (3, 4), если ее центр лежит на прямой $2x - y + 1 = 0$.

182. Составить уравнение окружности, касающейся двух прямых $2x + y - 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$ и проходящей через начало координат.

183. Составить уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ в начале координат.

184. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax + By + C = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = R^2$?

185. Составить уравнения касательных к окружности $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, параллельных прямой $3x - 4y = 0$.

---

186. Привести к нормальному виду уравнения окружностей:
1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$;
2) $x^2 + y^2 + x - 5y - 3 = 0$;
3) $3x^2 + 3y^2 - 2x + 7y + 1 = 0$.

187. Окружность проходит через точки (1, 4), (-7, 4) и (2, -5).

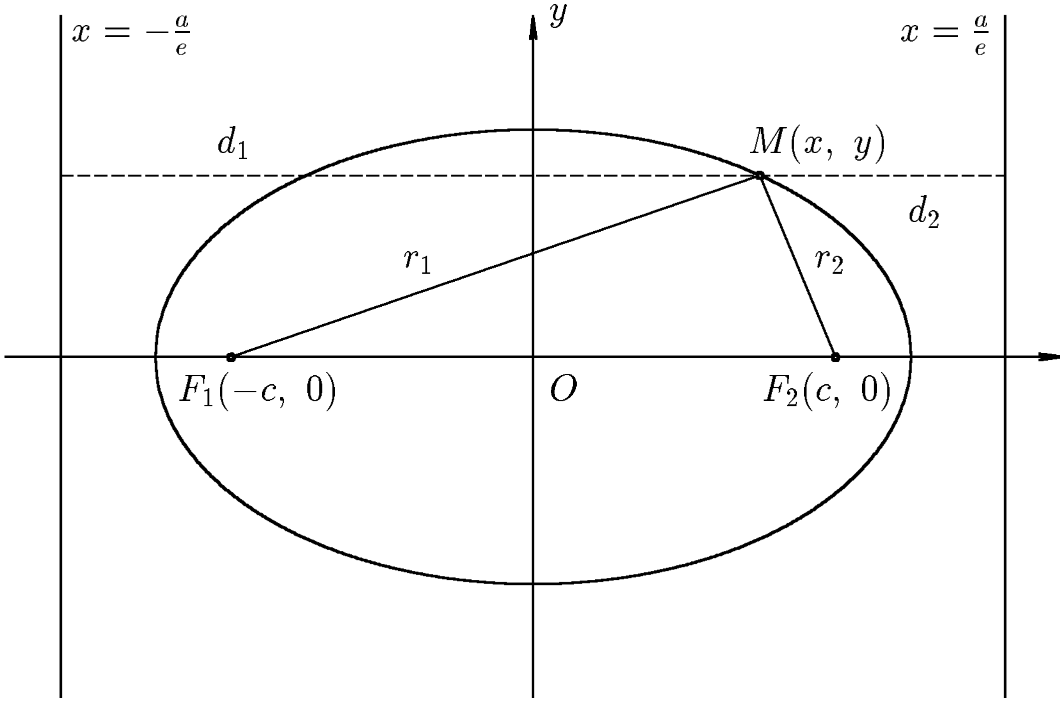


Рис. 4.

Найти ее центр, радиус и уравнение.

188. Составить уравнение окружности, касающейся прямой $x + 2y = 0$ и прямой $x - 2y + 1 = 0$ в точке (-1, 0).

189. Составить уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ в начале координат.

190. Определить длину отрезка касательной, проведенной из точки $(7,\ 1)$ к окружности $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

16 Эллипс

Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух постоянных точек — *фокусов* эллипса есть величина постоянная, равная $2a$. Расстояние между фокусами $F_2F_1 = 2c$ (рис.4).

Простейшее уравнение эллипса мы получим, выбрав прямую, соединяющую фокусы, за ось абсцисс и поместив начало координат в середине между ними. Тогда уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

При таком выборе системы координат оси координат совпадают с осями симметрии эллипса, а начало координат с центром симметрии.

Точки пересечения эллипса с его осями (A_1 и A_2, B_1 и B_2) называются *вершинами* эллипса.

Отрезки, заключенные между вершинами, называются *осями* эллипса: большая (фокальная) ось $A_2A_1 = 2a$ и малая ось $B_2B_1 = 2b$.

Число

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

называется *эксцентриситетом* эллипса.

Расстояния любой точки $M(x,\ y)$ эллипса до фокусов называются ее *фокальными радиусами-векторами* r_1 и r_2; мы имеем:

$$r_1 = a + ex, \qquad r_2 = a - ex \ .$$

Прямые, определяемые уравнениями

$$x = \pm\frac{a}{e} \ ,$$

называются *директрисами* эллипса.

Отношение расстояния любой точки эллипса до фокуса (r_1 или r_2) к расстоянию той же точки до соответствующей директрисы (d_1 или d_2) равно эксцентриситету:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e \ .$$

Середины параллельных хорд эллипса лежат на одной прямой, называемой *диаметром* эллипса, сопряженным этим хордам. Если

k — угловой коэффициент хорд эллипса, то уравнение сопряженного им диаметра имеет вид:

$$\frac{x}{a^2} + k\frac{y}{b^2} = 0 \ .$$

Два диаметра, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, называются *сопряженными*. Если $k_1, \ k_2$ — их угловые коэффициенты, то

$$r_1 r_2 = -\frac{b^2}{a^2} \ .$$

Касательная к эллипсу в его точке $M_0(x_0, \ y_0)$ определяется уравнением:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \ .$$

ЗАДАЧИ

191. Составить каноническое уравнение эллипса, если:
1) полуоси его соответственно равны 5 и 4;
2) расстояние между фокусами равно 8 и большая ось равна 10;
3) большая ось равна 26 и эксцентриситет $e = \frac{12}{13}$.

192. Определить фокусы эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$.

193. Дан эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Написать уравнения его директрис.

194. Определить эксцентриситет эллипса, зная, что:
1) малая ось его видна из фокуса под прямым углом;
2) расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами малой и большой осей;
3) расстояние между директрисами в четыре раза больше расстояния между фокусами.

195. На эллипсе $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.

196. Определить диаметр эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, сопряженный хордам, имеющим угловой коэффициент $k=\frac{2}{3}$.

197. Составить уравнение такой хорды эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, которая точкой $M(2,\ 1)$ делится пополам.

198. Доказать, что стороны прямоугольника, вписанного в эллипс параллельны его осям.

199. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ в точке $M(4,\ 3)$.

200. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, проходящих через точку $N(10,\ 4)$.

201. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax+By+C=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?

202. Найти общие касательные к следующим двум эллипсам: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ и $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

203. Доказать, что отрезки касательных к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, заключенные между касательными, проведенными в вершинах большой оси, видны из фокусов под прямым углом.

204. Найти геометрическое место проекций какого-либо фокуса эллипса на касательные к этому эллипсу.

205. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку, лежащую внутри этой окружности.

---

206. Определить фокусы эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

207. Определить эксцентриситет эллипса, если:

1) отрезок между фокусами виден из вершин малой оси под углом 60°;

2) расстояние между двумя вершинами эллипса различных осей в два раза больше расстояния между фокусами;

3) расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин осей.

208. Прямые $x = \pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.

209. Через фокус $F(c,\ 0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ проведена хорда, перпендикулярная к большой оси. Найти длину этой хорды.

210. Составить уравнение прямой, проходящей через середины хорд $2x - y + 7 = 0,\ 2x - y - 1 = 0$ эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

211. Определить касательные к эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, параллельные прямой $x + y - 1 = 0$.

212. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проведенные в концах одного и того же диаметра, параллельны между собой, и обратно, если две касательные к эллипсу параллельны, то точки и касания лежат на одном и том же диаметре.

213. Доказать, что произведение расстояний любой касательной эллипса от двух его фокусов есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

214. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ отсекают на двух касательных, проведенных в концах большой оси, отрезки, произведение которых есть величина постоянная, равная b^2.

215. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax + By + C = 0$:

1) пересекает эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

2) не пересекает этот эллипс?

216. Найти произведение расстояний от фокуса данного эллипса до любых двух параллельных касательных к этому эллипсу.

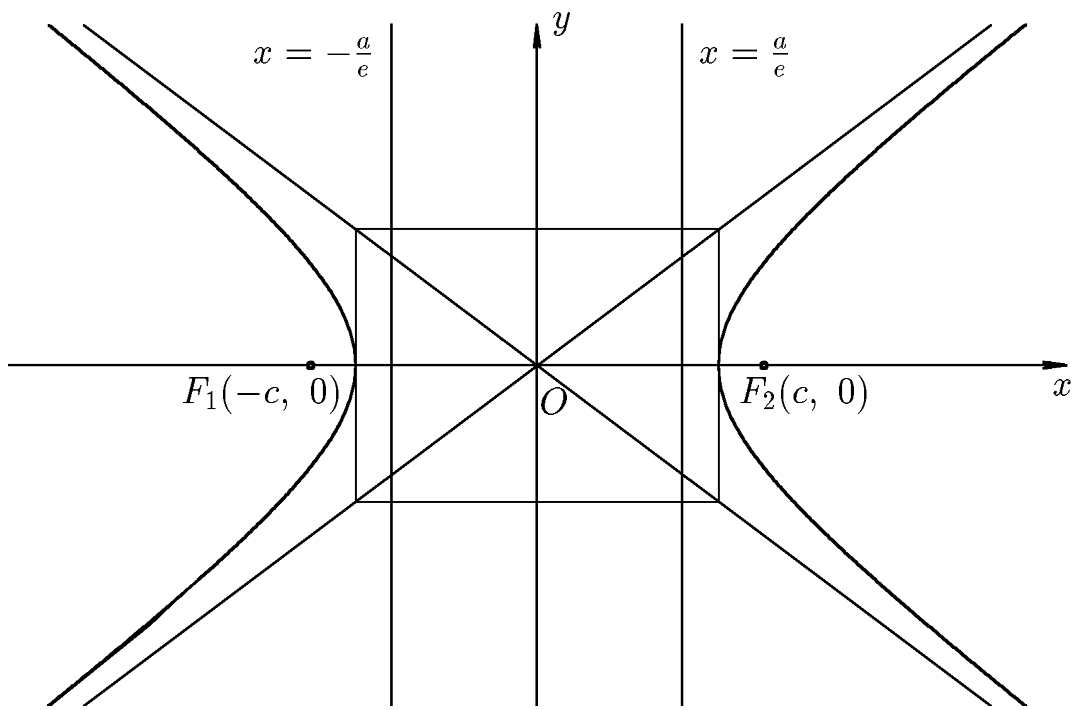


Рис. 5.

17 Гипербола

Гипербола есть геометрическое место точек, для которых абсолютная величина разности расстояний от двух постоянных точек — *фокусов* гиперболы есть величина постоянная, равная $2a$. Расстояние между фокусами $F_2F_1 = 2c$ (рис. 5).

Простейшее уравнение гиперболы мы получим, выбрав прямую, соединяющую фокусы, за ось абсцисс и поместив начало координат в середине между ними. Тогда уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

При таком выборе системы координат оси координат совпадают с осями симметрии гиперболы, а начало координат — с центром симметрии.

Гипербола имеет две действительные *вершины* — точки пересечения гиперболы с осью Ox; отрезок, заключенный между ними называется *действительной* (вещественной) *осью* гиперболы. Со второй осью гипербола пересекается в двух мнимых точках $(0,\ \pm ib)$. Условно, действительный отрезок $2b$ называется *мнимой осью* гиперболы.

Число

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Расстояния любой точки $M(x,\ y)$ гиперболы до фокусов называются ее *фокальными радиусами-векторами* r_1 и r_2; для левой ветви гиперболы мы имеем:

$$r_1 = -a - ex, \qquad r_2 = a - ex \ ;$$

для правой ветви:

$$r_1 = a + ex, \qquad r_2 = -a + ex \ .$$

Прямые, определяемые уравнениями

$$x = \pm\frac{a}{e} \ ,$$

называются *директрисами* гиперболы.

Отношение расстояния любой точки гиперболы до фокуса (r_1 или r_2) к расстоянию той же точки до соответствующей директрисы (d_1 или d_2) равно эксцентриситету:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e \ .$$

Середины параллельных хорд гиперболы лежат на одной прямой, называемой *диаметром* гиперболы, сопряженным этим хордам. Если k — угловой коэффициент хорд гиперболы, то уравнение сопряженного им диаметра имеет вид:

$$\frac{x}{a^2} - k\frac{y}{b^2} = 0 \ .$$

Два диаметра, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, называются *сопряженными*. Если $k_1,\ k_2$ — их угловые коэффициенты, то

$$k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}\ .$$

Касательная к гиперболе в его точке $M_0(x_0,\ y_0)$ определяется уравнением:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1\ .$$

Асимптоты гиперболы определяются уравнениями:

$$y = \pm\frac{b}{a}x\ .$$

Две гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

называются сопряженными.

ЗАДАЧИ

217. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:
1) действительная ось равна 48 и эксцентриситет $e = \frac{13}{12}$;
2) действительная ось равна 16 и угол ϕ между асимптотой и осью абсцисс определяется условием $\mathrm{tg}\phi = \frac{3}{4}$.

218. Даны уравнения асимптот гиперболы $y = \pm\frac{5}{12}x$ и координаты точки $M(24,\ 5)$, лежащей на гиперболе. Составить уравнение гиперболы.

219. Определить фокусы гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$.

220. Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра.

221. Составить уравнение такой хорды гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, которая точкой $M(5,\ 1)$ делится пополам.

222. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $M(5,\ -4)$.

223. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, если касательная:

1) параллельна прямой $3x - y - 17 = 0$;

2) перпендикулярна к прямой $2x + 5y + 11 = 0$.

224. Определить произведение расстояния от фокусов гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ до касательной.

225. Доказать, что произведение отрезков, отсекаемых касательной к гиперболе на ее асимптотах (считая от центра), равно квадрату половины расстояния между фокусами.

226. Доказать, что точка гиперболы служит серединой отрезка касательнои к этой гиперболе, заключенного между асимптотами.

---

227. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) действительная полуось $a = 5$ и мнимая $b = 3$;

2) расстояние между фокусами равно 10 и действительная ось равна 8.

228. Определить фокусы гиперболы $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$.

229. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ при условии, что эксцентриситет ее $e = \frac{5}{4}$.

230. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Требуется:

1) вычислить координаты фокусов;

2) вычислить эксцентриситет;

3) написать уравнения асимптот и директрис; 4) написать уравнение сопряжении гиперболы и вычислить ее эксцентриситет.

231. Найти вершины квадрата, вписанного в гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, и исследовать, в какие гиперболы возможно вписать квадрат.

232. Найти необходимое и достаточное условие касания прямой

$Ax + By + C = 0$ с гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

233. Даны фокусы гиперболы $F_1(4,\ 2)$, $F_2(-1,\ -10)$ и уравнение касательной $3x + 4y - 5 = 0$. Определить полуоси.

234. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку, лежащую вне этой окружности.

235. Найти произведение расстояний от фокуса данной гиперболы до любых двух параллельных касательных, к этой гиперболе.

236. Найти площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и произвольной касательной к этой гиперболе.

18 Парабола

Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от постоянной точки — *фокуса* параболы — и постоянной прямой — *директрисы* параболы (рис. 6).

Если за ось абсцисс принять перпендикуляр, опущенный из фокуса на директрису, а начало координат поместить посредине между фокусом и директрисой, то уравнение параболы будет:

$$y^2 = 2px\ ,$$

где параметр p есть расстояние фокуса от директрисы. Парабола имеет одну ось симметрии, которая совпадает, при таком выборе системы координат, с осью Ox. Единственная вершина параболы совпадает с началом координат.

Директриса параболы определяется уравнением:

$$x = -\frac{p}{2}\ .$$

Расстояние r любой точки $M(x,\ y)$ параболы до фокуса опреде-

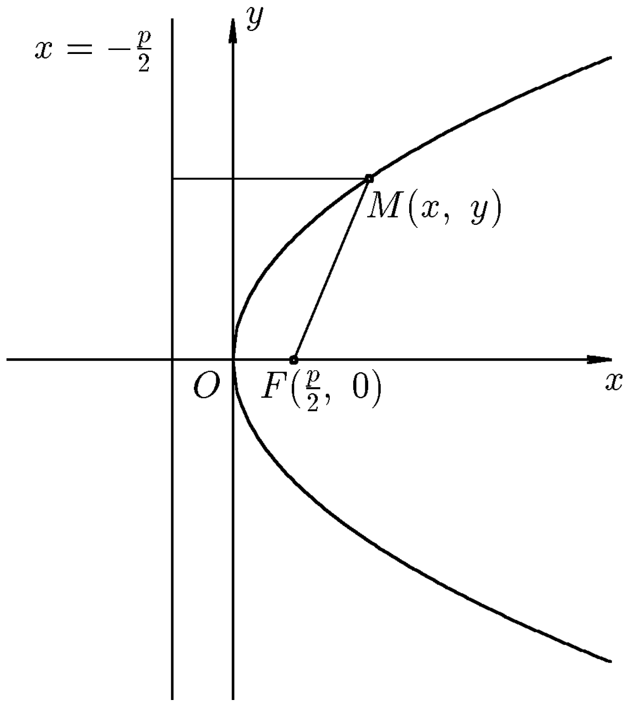


Рис. 6.

ляется формулой

$$r=\frac{p}{2}+x\ .$$

Середины параллельных хорд параболы лежат на одной прямой, называемой *диаметром* параболы, сопряженным этим хордам. Все диаметры параболы параллельны ее оси симметрии и определяются уравнением

$$y=\frac{p}{k}\ ,$$

где k — угловой коэффициент сопряженных ему хорд.

Касательная к параболе в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ определяется уравнением

$$y_0y=p(x+x_0)\ .$$

ЗАДАЧИ

237. Определить координаты фокуса параболы $y^2=4x$.

238. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние фокуса от вершины равно 3.

239. На параболе $y^2 = 6x$ найти точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20.

240. Через фокус параболы $y^2 = 2px$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Определить длину этой хорды.

241. Найти такую хорду параболы $y^2 = 4x$, которая точкой $(3,\ 1)$ делится пополам.

242. Найти необходимое и достаточное условие касания прямой $Ax + By + C = 0$ и параболы $y^2 = 2px$.

243. Определить геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы $y^2 = 2px$ на касательные.

244. Найти кратчайшее расстояние параболы $y^2 = 4x$ от прямой $4x + 3y + 46 = 0$.

245. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота 6 м.

246. Найти геометрическое место центров кругов, проходящих через данную точку и касающихся данной прямой.

---

247. Определять координаты фокуса параболы $x^2 = 4y$.

248. Определить координаты фокуса параболы $y^2 = -8x$.

249. Составить уравнение директрисы параболы $y^2 = 6x$.

250. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 4x$; в точке $M(9,\ 6)$.

251. Дано уравнение касательной $x - 3y + 9 = 0$ к параболе $y^2 = 2px$. Составить уравнение параболы.

252. Доказать, что любая касательная параболы пересекает директрису и фокальную хорду, перпендикулярную к оси, в точках, равноудаленных от фокуса.

253. Камень, брошенный под острым углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 м от начального положения. Определить параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 м.

254. Найти геометрическое место центров кругов, касающихся оси ординат и круга $x^2 + y^2 = 1$.

19 Преобразования аффинных координат на плоскости и в пространстве

Общее преобразование одной аффинной системы координат на плоскости в другую определяется по формулам:

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 \ , \\
y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 \ ,
\end{aligned}
$$

где (рис.7) $a_1,\ a_2$ — координаты вектора $\overrightarrow{O'E_1'}$, $b_1,\ b_2$ — координаты вектора $\overrightarrow{O'E_2'}$, $c_1,\ c_2$ — координаты точки O' относительно системы координат Oxy, x, y — координаты произвольной точки M плоскости относительно системы Oxy и x', y' координаты той же точки M относительно системы $O'x'y'$.

В случае параллельного переноса формулы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
x &= x' + c_1 \ , \\
y &= y' + c_2 \ .
\end{aligned}
$$

Формулы преобразования поворота одной прямоугольной системы координат Oxy в другую прямоугольную систему $O'x'y'$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \ , \\
y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \ ,
\end{aligned}
$$

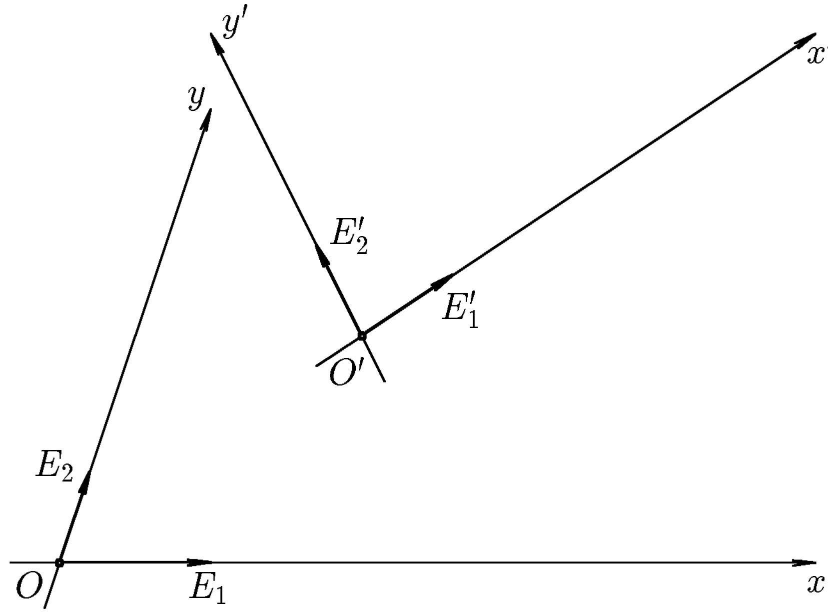


Рис. 7.

где α — угол от положительного направления оси Ox до положительного направления оси Ox'. Системы Oxy и $O'x'y'$ в этом случае называются системами одного класса. Если же новая система координат $O'x'y'$ получается из старой системы Oxy поворотом на угол α и последующей симметрией относительно Ox', то формулы преобразования будут:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha - y'\cos\alpha\ . \end{aligned}$$

В этом случае системы Oxy и $O'x'y'$ называются системами разных классов.

Если нам даны две системы координат в пространстве $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, причем $\overrightarrow{O'E'_1} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\overrightarrow{O'E'_2} = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, $\overrightarrow{O'E'_3} = \{c_1,\ c_2,\ c_3\}$, $O'(d_1,\ d_2,\ d_3)$, то координаты x, y, z точки M относительно системы $Oxyz$ через координаты x', y', z' той же точки относительно системы $O'x'y'z'$ выражаются формулами:

$$\begin{aligned} x &= a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1 \ , \\ y &= a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2 \ , \\ z &= a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3 \ . \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

255. Найти новые координаты точек $A(2,\ 3)$, $B(-5,\ 4)$, $C(0,\ 2)$ в системе, полученной переносом данной аффинной, если за новое начало координат принимается точка $O'(7,\ -1)$.

256. Найти формулы преобразования аффинной системы координат на плоскости в каждом из следующих случаев, если даны старые координаты новых единичных векторов и старые координаты нового начала координат:

1) $\overrightarrow{O'E_1'} = \{2,\ 5\}$, $\overrightarrow{O'E_2'} = \{7,\ 9\}$, $O'(3,\ 1)$;
2) $\overrightarrow{O'E_1'} = \{5,\ 0\}$, $\overrightarrow{O'E_2'} = \{0,\ 4\}$, $O'(3,\ 5)$;
3) $\overrightarrow{O'E_1'} = \{0,\ 2\}$, $\overrightarrow{O'E_2'} = \{-7,\ 0\}$, $O'(0,\ 2)$;
4) $\overrightarrow{O'E_1'} = \{a,\ 0\}$, $\overrightarrow{O'E_2'} = \{0,\ b\}$, $O'(0,\ 0)$;
5) $\overrightarrow{O'E_1'} = \{0,\ a\}$, $\overrightarrow{O'E_2'} = \{b,\ 0\}$, $O'(0,\ 0)$.

257. Даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$.. По отношению к первой системе начало второй находится в точке $O'(2,\ 1,\ 3)$, а единичные векторы второй системы суть $\mathbf{e}_1'\{2,\ 4,\ 1\}$, $\mathbf{e}_2'\{0,\ 4,\ 4\}$, $\mathbf{e}_3'\{1,\ 1,\ 0\}$;

1) написать выражения координат точек относительно первой системы через их координаты во второй системе;

2) выразить координаты точек относительно второй системы через их координаты в первой системе;

3) найти координаты начала O и единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ первой системы относительно второй.

258. Найти уравнение гиперболы в системе координат, координатными осями которой являются асимптоты.

259. Начало и векторы базиса нового репера на плоскости заданы своими координатами относительно первоначального репера: $O'(1,\ -1)$, $\mathbf{e}'_1 = \{2,\ 3\}$, $\mathbf{e}'_2 = \{1,\ 2\}$.

1) Какое уравнение в новой системе координат будет иметь прямая $\ell :\ 2x - 3y + 5 = 0$?

2) Какое уравнение относительно первоначальной системы координат имеет координатная ось $O'y'$?

3) Какие координаты имеют точки $O(0,\ 0)$ и $A(-2,\ 1)$ в новой системе координат?

260. Векторы $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \dots,\ \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{x}$ заданы своими кординатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \dots,\ \mathbf{e}_n$ сами образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе: $\mathbf{e}_1 = \{1,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1,\ 1,\ 2\}$, $\mathbf{e}_3 = \{1,\ 2,\ 3\}$; $\mathbf{x} = \{6,\ 9,\ 14\}$.

261. Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом, и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах: $\mathbf{e}_1 = \{1,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{2,\ 3,\ 3\}$, $\mathbf{e}_3 = \{3,\ 7,\ 1\}$; $\mathbf{e}'_1 = \{3,\ 1,\ 4\}$, $\mathbf{e}'_2 = \{5,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{e}'_3 = \{1,\ 1,\ -6\}$.

262. По отношению к косоугольной системе координат $(\omega = \frac{\pi}{3})$ дана точка $M(-1,\ 4)$. Найти координаты этой же точки, приняв за новые оси координат биссектрисы прежних координатных углов.

263. Координаты ряда точек удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22 = 0$. Какому уравнению будут удовлетворять координаты тех же точек, если прежняя система координат заменена новой, а именно — начало координат перенесено в точку $O'(-1,\ 5)$, а направление осей не изменилось?

---

264. В аффинной системе координат задана точка $M(2,\ 5)$. Ее корнаты после переноса соответственно равны -4 и 7. Найти старые координаты нового начала O' и новык единичных точек $E'_1,\ E'_2,\ E'$

и новые координаты старого начала O и старых единичных точек $E_1,\ E_2,\ E$.

265. Даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$. Координаты x и y произвольной точки относительно первой системы выражаются через ее координаты x' и y' относительно второй системы следующими формулами:

$$x = 2x' - 5y' + 3, \qquad y = -x' + 2y' - 2\ .$$

Найти координаты начала второй системы и единичных векторов ее осей относительно первой системы.

266. Координаты $x,\ y,\ z$ точек в системе $Oxyz$ выражаются через координаты $x',\ y',\ z'$ этих точек в системе $O'x'y'z'$ соотношениями

$$x = -2x' - y' - z' - 1, \quad y = -y' - z', \quad z = x' + 3y' + z' + 1\ ;$$

1) выразить координаты $x',\ y',\ z'$ через координаты $x,\ y,\ z$;
2) найти координаты начала O' и единичных векторов $\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \mathbf{e}'_3$, второй системы относительно первой;
3) найти координаты начала O и единичных векторов $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$, второй системы относительно первой.

267. Векторы $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \dots,\ \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{x}$ заданы своими кординатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \dots,\ \mathbf{e}_n$ сами образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе: $\mathbf{e}_1 = \{2,\ 1,\ -3\}$, $\mathbf{e}_2 = \{3,\ 2,\ -5\}$, $\mathbf{e}_3 = \{1,\ -1,\ 1\}$; $\mathbf{x} = \{6,\ 2,\ -7\}$.

268. Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом, и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах: $\mathbf{e}_1 = \{1,\ 1,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1,\ 2,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{e}_3 = \{1,\ 1,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{e}_4 = \{1,\ 3,\ 2,\ 3\}$; $\mathbf{e}'_1 = \{1,\ 0,\ 3,\ 3\}$, $\mathbf{e}'_2 = \{-2,\ -3,\ -5,\ -4\}$, $\mathbf{e}'_3 = \{2,\ 2,\ 5,\ 4\}$, $\mathbf{e}_4 = \{-2,\ -3,\ -4,\ -4\}$.

269. Дан ромб, сторона которого $a = 2$. Оси координат сначала совпадали с двумя сторонами, угол между которыми $\omega = \frac{2\pi}{3}$, и затем с его диагоналями. Определить координаты вершин ромба относительно второй системы и дать соответствующие формулы преобразования координат.

270. Координаты некоторых точек удовлетворяют уравнению $xy + 3x - 2y - 6 = 0$. Какому уравнению будут удовлетворять координаты тех же точек после того, как начало координат будет перенесено в точку $O'(2,\ -3)$?

ОТВЕТЫ

1. $\overrightarrow{AB} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$. **2.** $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$. **5.** Точка пересечения медиан треугольника. **6.** $\overrightarrow{OM} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. **7.** $\overrightarrow{A'B'} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{A'D'} = \mathbf{q}$, $\overrightarrow{A'C'} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\overrightarrow{A'B} = \mathbf{p} - \mathbf{r}$, $\overrightarrow{A'D} = \mathbf{q} - \mathbf{r}$, $\overrightarrow{A'C} = \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{r}$. **9.** $\overrightarrow{BC} = \frac{4\mathbf{l}-2\mathbf{k}}{3}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{2\mathbf{l}-4\mathbf{k}}{3}$. **10.** 0. **11.** $\overrightarrow{BC} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\overrightarrow{CD} = -\mathbf{q}$, $\overrightarrow{DE} = -\mathbf{p}$, $\overrightarrow{EF} = -\mathbf{p} - \mathbf{q}$. **13.** Точка пересечения диагоналей. **14.** $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}|+\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$. **15.** $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DB} = \mathbf{b} - \mathbf{d}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - \mathbf{d}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$. **16.** $\overrightarrow{EF} = \frac{\mathbf{m}+\mathbf{p}}{2} - \frac{\mathbf{n}+\mathbf{q}}{2}$. **18.** $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$. **19.** $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}$. **20.** $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_1 + \lambda(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{r}_3}{1+\lambda}$, $\mathbf{r}'' = \frac{\mathbf{r}_1-\lambda\mathbf{r}_3}{1-\lambda}$. **22.** $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}{2}$. **23.** $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_B+\mathbf{r}_D-\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_{B'} = \mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_{A'}$, $\mathbf{r}_{C'} = \mathbf{r}_B+\mathbf{r}_D+\mathbf{r}_{A'}-2\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_{D'} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{A'}$. **24.** $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}$. **25.** 1) $\{-30,\ 21\}$; 2) $\{0,\ 0\}$. **26.** 1) $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$; 2) $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$; 3) $\mathbf{c} = -\frac{3}{2}\mathbf{a}$. **27.** 1) Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно независимы; 2) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$; 3) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы, но вектор $\mathbf{c}$ не может быть представлен как линейная комбинация векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, так как эти последние коллинеарны между собой, а вектор $\mathbf{c}$ им не коллинеарен. **28.** $\overrightarrow{AK} = \{\frac{8}{7},\ \frac{13}{7}\}$. **29.** $\alpha = 2$, $\gamma = -3$. **30.** 1) $\{3,\ 22,\ -3\}$; 2) $\{19,\ 39,\ 30\}$. **31.** 1) $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$; 2) $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$; 3) $\mathbf{d} = 4\mathbf{a} - \mathbf{c}$. **33.** $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$. **35.** $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D(1,\ \sqrt{3})$, $E(0,\ \sqrt{3})$, $F(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$. **36.** $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $(\frac{1}{3},\ 1)$, $D(0,\ 1)$, $O(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4})$, $S(0,\ \frac{3}{2})$. **37.** $C(5,\ 3)$, $D(2,\ 7)$ или $C(-1,\ -5)$, $D(-4,\ -1)$. **38.** 1) $(x,\ 0,\ 0)$, 2) $(0,\ y,\ z)$. **39.** $M(\frac{10}{9},\ \frac{2}{9})$. **40.** $A(-4,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $(1,\ 3)$, $D(-1,\ 3)$, $M(0,\ \frac{12}{5})$, $S(0,\ 4)$. **41.** $D(1,\ -2)$. **42.** $(0,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 1)$. **43.** 1) $(-x,\ -y,\ -z)$; 2) $(x,\ y,\ -z)$; 3) $(-x,\ -y,\ z)$. **44.** 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{4}$. **45.** $(\frac{11}{5},\ 0)$ и $(0,\ -11)$. **46.** $(-3,\ 3)$, $(7,\ 5)$, $(-3,\ -3)$. **47.** $C(0,\ -1)$, $D(4,\ -4)$.

48. $C(4,\ -5,\ -2)$. **49.** 3. **51.** 1) $(-\frac{8}{3},\ \frac{5}{3})$; 2) $(9,\ 5)$; 3) $(-\frac{22}{3},\ \frac{1}{3})$; 4) $(-\frac{1}{4},\ \frac{5}{2})$. **52.** $B(0,\ -7)$. **53.** $C(10,\ 9)$, $D(4,\ -4)$. **54.** $A(3,\ -1)$, $B(0,\ 8)$. **55.** $\lambda_1 = \frac{7}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$. **56.** $\frac{1}{2}$. **57.** 1) 5; 2) $\sqrt{34}$; 3) 13; 4) $\sqrt{2}$. **58.** $(14,\ 0)$ и $0,\ \frac{14}{3}$. **59.** $M(2,\ 10)$. **60.** $(0,\ \frac{11}{6},\ 0)$. **61.** $B_1(9,\ 5,\ 11)$, $B_2(9,\ 5,\ -1)$. **62.** 1) $\sqrt{137}$; 2) 5; 3) 11; 4) 13. **63.** $(0, -10)$. **64.** $M_1(1,\ -1)$, $r_1 = 1$; $M_2(5,\ -5)$, $r_2 = 5$. **65.** $(\frac{5}{6},\ 0,\ -\frac{7}{6})$. **66.** $(3,\ 3,\ 1)$, $R = 3$. **67.** 1) 20; 2) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$; 3) 0; 4) 18; 5) -3. **68.** $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. **70.** 0. **71.** $\overrightarrow{CH} = \frac{\mathbf{a}^2\mathbf{b}+\mathbf{b}^2\mathbf{a}}{c^2}$. **73.** **74.** -19. **75.** $\frac{\pi}{3}$. **76.** $-\frac{3}{2}$. **78.** $CD^2 = \frac{\lambda}{1+\lambda}a^2 + \frac{1}{1+\lambda}b^2 - \frac{1}{(1+\lambda)^2}c^2$, где a, b, c — длины сторон треугольника. **80.** $\phi = \arccos\frac{9\sqrt{3}-10}{26}$. **82.** 1)$\omega = \frac{\pi}{2}$, $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 1$; 2)$\omega = \frac{\pi}{3}$, $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = 1$; 3) $\cos\omega = \frac{4}{5}$, $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 5$; 4) $\cos\omega = -\frac{4}{5}$, $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 5$. **83.** $|\mathbf{a}| = 78$. **84.** $\mathbf{b}_1 = \left\{\frac{4}{5},\ -\frac{1}{5}\right\}$, $\mathbf{b}_2 = \left\{-\frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\right\}$. **85.** $\alpha = \frac{5\pi}{3}$. **86.** $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 1, \angle(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2) = \frac{2\pi}{3}$. **87.** 1) -3; 2) 0; 3)1. **88.** 1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 2)$\alpha = 90°$. **89.** $\cos\psi = \frac{3\sqrt{3}-4}{12}$. **90.** $|\mathbf{a}| = 30$. **91.** $g_{11} = 4$, $g_{22} = 9$, $g_{12} = 3$, $d = \sqrt{244}$. **92.** $AB = 6$, $AC = 4$, $\angle A = \frac{\pi}{3}$. **93.** $A'B' = 1$, $A'C' = 5$, $\cos A' = \frac{4}{5}$. **94.** 1)45°; 2)90°; 3)135°; 4)180°. **95.** 1) 31; 2) 6; 3) 0. **96.** 3. **97.** $\cos\phi = -\frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{28}}$. **98.** $C(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2} - 2\sqrt{3})$. **99.** $D(-5,\ 7)$, $C(0,\ 9)$ или $D'(-1,\ -3)$, $C'(4,\ -1)$. **100.** $B_1(\frac{5}{2},\ \frac{7}{3})$, $B_2(-\frac{5}{2},\ -\frac{13}{3})$. **101.** $(x_0 + (x_1 - x_0)\cos\frac{2\pi(k-1)}{n} - (y_1 - y_0)\sin\frac{2\pi(k-1)}{n},\ y_0 + (x_1 - x_0)\sin\frac{2\pi(k-1)}{n} + (y_1 - y_0)\cos\frac{2\pi(k-1)}{n})$. **102.** $(Rt - R\sin t,\ R - R\cos t)$. **103.** $((R - r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t,\ (R - r)\sin t + r\sin\frac{R-r}{r}t)$. **104.** $(R\cos t + Rt\sin t,\ R\sin t - Rt\cos t)$. **105.** $C(4,\ 3)$, $D(-2, -5)$. **106.** $C_1(4-\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3})$, $C_2(4+\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3})$. **107.** $\{a_1\cos\omega_1 + a_2\cos\omega_2 + a_3\cos\omega_3,\ a_1\sin\omega_1 + a_2\sin\omega_2 + a_3\sin\omega_3\}$. **108.** $(x_0 + d_1\cos\phi_1 + \ldots + d_n\cos\phi_n,\ y_0 + d_1\sin\phi_1 + \ldots + d_n\sin\phi_n)$. **109.** $((R + r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t,\ (R + r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t)$. **110.** 7. **111.** 12,5. **112.** $\frac{7}{5}$. **113.** $(32,\ 0)$, $(-8,\ 0)$. **114.** 1) 4; 2) $\frac{27}{2}$; 3) 13. **115.** $3\sqrt{2}$. **116.** $(5,\ 2)$ или $(2,\ 2)$. **117.** $(a,\ 0)$, $(a\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6})$, $(2a,\ \frac{\pi}{3})$, $(a\sqrt{3},\ \frac{\pi}{2})$, $(a,\ \frac{2\pi}{3})$. **118.** 1) $AB = \sqrt{3}$; 2) CD=10; 3) EF=5.

119. $S=1$. **120.** $\rho=10$, $\arccos\phi=\frac{4}{5}$, $\arcsin\phi=-\frac{3}{5}$. **121.** $r=\frac{a}{\cos\phi}$. **122.** $r=\frac{a}{\cos\phi}\pm b$. **123.** $r=2a(\cos\phi\pm 1)$. **124.** 1) $B(5,\ \frac{5\pi}{3}$; 2) $C(5,\ \frac{4\pi}{3})$. **125.** $A(1,\ \sqrt{3})$, $B(-1,\ 1)$, $C(0,\ 5)$, $D(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2})$. **126.** $r=2a\cos\phi$. **127.** $r=\frac{a}{\cos\phi}\pm a\operatorname{tg}\phi$. **128.** $r=\frac{2a\sin^2\phi}{\cos\phi}$. **129.** $x=2a\cos^2\phi$, $y=2a\operatorname{tg}\phi$. **130.** $r=\frac{v}{\omega}\phi$. **131.** $x-3=0$, $y+2=0$. **132.** $5x+7y-11=0$. **133.** $5x+3y-15=0$. **134.** $x=3-4t$, $y=-5+2t$. **135.** 1) $x=-2t$, $y=-\frac{5}{6}+t$; 2) $x=4+2t$, $y=t$; 3) $x=t$, $y=-3t+5$; 4) $x=2$, $y=t$; 5) $x=t$, $y=-3$; 6) $x=3t$, $y=-2t$. **136.** $3x+y-1=0$, $7x+5y-34=0$. **137.** 1) пересекаются в точке $(1,\ 2)$; 2) параллельны; 3) совпадают; 4) пересекаются в точке $(-5,\ 0)$; 5) параллельны; 6) совпадают; 7) пересекаются в точке $(-4,\ 10)$; 8) параллельны; 9) совпадают. **138.** 1) пересекаются в точке $(15,\ -10)$; 2) параллельны; 3) совпадают. **139.** $3x-5y+9=0$, $x-y+3=0$; **140.** $x-y-7=0$, $x-2y-10=0$. **141.** $\frac{9}{8}$. **143.** Данная прямая пересекает стороны CB и BA, а также продолжение сторны CA за точку A. **144.** $8x-y=0$. **145.** $x=3+3t$, $y=-5t$. **146.** 1) совпадают; 2) пересекаются в точке $(-4,\ 3)$; 3) параллельны; 4) пересекаются в точке $(4,\ 6)$; 5) параллельны; 6) совпадают. **147.** $3x-2y-13=0$. **148.** Такой прямой не существует, так как данная точка лежит на данной прямой. **149.** $x-3y-7=0$, $2x+5y-3=0$. **150.** $3x-4y+16=0$, $5x+3y-1=0$, $2x-y-7=0$. **151.** $x+2y-3=0$; $2x-y-6=0$; $x+2y-23=0$; $2x-y+14=0$. **152.** $9x+12y+20=0$, $5x-12y+36=0$. **154.** Точка A лежит на второй стороне, на ее продолжении за третью вершину; Точка B лежит в области, ограниченной первой стороной и продолжениями второй и третьей сторон соответсвенно за третью и вторую вершины. Точка C лежит в области, ограниченной третьей стороной и продолжениями первой и второй сторон соответсвенно за вторую и первую вершины. Точка D лежит в области, ограниченной продолжениями первой и второй сторон за третью вершину. **155.** 1) три прямые проходят через одну точку; 2) три прямые параллельны между собой; 3) три прямые проходят через одну точку; 4) три прямые параллельны между собой; 5) три прямые параллельны между собой; 6) прямые образуют треугольник; 7) первые две прямые параллельны, трятья их пересекает. **156.** $25x + 29y - 21 = 0$. **157.** $32x - 9 = 0$, $32y - 19 = 0$. **159.** $5x - 2y = 0$. **160.** $38x - 19y + 30 = 0$. **161.** $8x - 49y + 20 = 0$. **162.** $2x + 3y - 26 = 0$. **163.** $3x - 4y + 12 = 0$. **164.** (2, -7). **165.** $M'(2,\ 3)$. **166.** $45°$ и $135°$. **167.** $x+y-4 = 0$. **168.** $\frac{13}{5}$, 2, $\frac{11}{5}$, $\frac{12}{5}$, 0. **169.** $7x - 2y + 57 = 0$, $7x - 2y - 49 = 0$. **170.** $\frac{12}{\sqrt{58}}$. **172.** 1), 3), 5), 6). **173.** $91x - 26y - 2 = 0$. **174.** $(\frac{29}{18},\ \frac{47}{54})$. **175.** $C(2,\ 4)$. **176.** $5x + y - 16 = 0$, $x - 5y + 2 = 0$. **177.** $\frac{7}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **178.** $\frac{1}{\sqrt{58}}$. **179.** $3x-y+9 = 0$, $3x-y-3 = 0$, $x+3y+7 = 0$. **180.** 1) $S(3,\ 0)$, $r = 3$; 2) $S(-3,\ 4)$, $r = 5$; 3) $S(5,\ -12)$, $r = 15$; 4) $S(-1,\ \frac{2}{3})$, $r = \frac{4}{3}$. **181.** $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$. **182.** $4x^2 + 4y^2 + 2x + (3 \pm 2\sqrt{10})y = 0$. **183.** $x-3y = 0$. **184.** $(A^2+B^2)R^2-C^2 = 0$. **185.** $3x-4y+14 = 0$, $3x-4y-36 = 0$. **186.** 1) $(x-1)^2+(y+2)^2-5 = 0$; 2) $(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2-\frac{19}{2} = 0$; 3) $(x - \frac{1}{3})^2 + (y + \frac{7}{6})^2 - \frac{41}{36} = 0$. **187.** $S(-3,\ -1)$, $r = \sqrt{41}$. **188.** $(x + \frac{9}{8})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 - \frac{5}{64} = 0$, $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 - \frac{5}{4} = 0$. **189.** $Ax + By = 0$. **190.** $2\sqrt{2}$. **191.** 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$. **192.** $(0,\ \pm 12)$. **193.** $x = \pm 9$. **194.** а) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $e = \frac{\sqrt{10}}{5}$; в) $e = \frac{1}{2}$. **195.** $(-\frac{15}{2},\ \pm\frac{3\sqrt{7}}{2})$. **196.** $24x + 25y = 0$. **197.** $32x + 25y - 89 = 0$. **199.** $3x + 4y - 24 = 0$. **200.** 1) $y = 4$; 2) $16x - 5y - 100 = 0$. **201.** $A^2a^2 + B^2b^2 - C^2 = 0$. **202.** $x \pm y \pm 3 = 0$. **204.** Окружность. **205.** Эллипс. **206.** $(\pm 3,\ 0)$. **207.** 1) $e = \frac{1}{2}$; 2) $e = sqrt\frac{2}{17}$; 3) $e = \frac{4}{5}$. **208.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$. **209.** $\frac{2b^2}{a}$. **210.** $8x + 25y = 0$. **211.** $x+y\pm 5 = 0$. **215.** 1) $A^2a^2+B^2b^2-C^2 > 0$; 2) $A^2a^2+B^2b^2-C^2 < 0$. **216.** b^2, где b — меньшая полуось эллипса. **217.** 1) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$; 2) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. **218.** $\frac{x^2}{432} - \frac{y^2}{75} = 1$. **219.** $F_1(-13,\ 0)$, $F_2(13,\ 0)$.

220. b. **221.** $20x-9y-91=0$. **222.** $x+y-1=0$. **223.** 1) $3x-y\pm3\sqrt{5}=0$. 2) $5x-2y\pm9=0$. **224.** b^2. **227.** 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **228.** $F_1(0,\ 17)$, $F_2(0,\ -17)$. **229.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **230.** 1) $F_1(5,\ 0)$, $F_2(-5,\ 0)$; 2) $e=\frac{5}{3}$; 3) $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{9}{5}$; 4) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$, $e=\frac{5}{4}$. **231.** $(\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}},\ \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}})$; задача имеет решение, если $b>a$. **232.** $a^2A^2-b^2B^2=C^2$. **233.** $a=\frac{\sqrt{269}}{2\sqrt{5}}$, $b=\frac{12}{\sqrt{5}}$. **234.** Гипербола. **235.** b^2, где b — длина мнимой полуоси. **236.** ab. **237.** $(1,\ 0)$. **238.** $y^2=12x$. **239.** $(18,\ 12)$ и $(18,\ \text{-}12)$. **240.** $2p$. **241.** $y=2x-5$. **242.** $B^2p=2AC$. **243.** Касательные к параболе и ее вершине. **244.** 2. **245.** 12. **246.** Парабола, имеющая данную точку фокусом и данную прямую директрисой. **247.** (0, 1). **248.** (-2, 0). **249.** $x=-\frac{3}{2}$. **250.** $x-3y+9=0$. **251.** $y^2=4x$. **253.** $\frac{8}{3}$. **254.** Две параболы: $y^2=\pm2x+1$. **255.** (-5, 4), (-12, 5), (-7, 3). **256.** 1) $x=2x'+7y'+3$, $y=5x'+9y'+1$, 2) $x=5x'+3$, $y=4y'+5$, 3) $x=-7y'$, $y=2x'+2$, 4) $x=ax'$, $y=by'$, 5) $x=by'$, $y=ax'$. **257.** 1) $x=2x'+z'+2$, $y=4x'+4y'+z'+1$, $z=x'+4y'+3$; 2) $x'=-x+y-z+4$, $y'=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{7}{4}$, $z'=3x-2y+2z-10$; 3) $O(4,\ -\frac{7}{4},\ -10)$, $\mathbf{e}_1=\{-1,\ \frac{1}{4},\ 3\}$, $\mathbf{e}_2=\{1,\ -\frac{1}{4},\ -2\}$, $\mathbf{e}_3=\{-1,\ \frac{1}{2},\ 2\}$. **258.** $x'y'=1$. **259.** 1) $5x'-4y'+5=0$, 2) $2x-y-3=0$, 3) $O'(-3,\ 5)$, $A'(-8,\ 13)$. **260.** $\{1,2,3\}$. **261.** $x=-27x'-71y'-41z'$, $y=9x'+20y'+9z'$, $z=4x'+12y'+8z'$. **262.** $x'=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $y'=\frac{5}{2}$. **263.** $x'^2+y'^2=4$. **264.** $O'(6,\ -2)$, $E_1'(7,\ -2)$, $E_2'(6,\ -1)$; $O(-6,\ 2)$, $E_1(-5,\ 2)$, $E_2(-6,\ 3)$. **265.** $O'(3,\ -2)$, $\mathbf{e}_1'=\{2,\ -1\}$, $\mathbf{e}_2'=\{-5,\ 2\}$. **266.** 1) $x'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$, $y'=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}$, $z'=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}$; 2) $O'(-1,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{e}_1'=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{e}_2'=\{-1,\ -1,\ 3\}$, $\mathbf{e}_3'=\{-1,\ -1,\ 1\}$; 3) $O(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4})$, $\mathbf{e}_1=\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\}$, $\mathbf{e}_2=\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{5}{4}\}$, $\mathbf{e}_3=\{0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\}$. **267.** $\{1,\ 1,\ 1\}$. **268.** $x_1=2x_1'+x_3'-x_4'$, $x_2=-3x_1'+x_2'-2x_3'+x_4'$, $x_3=x_1'-2x_2'+2x_3'-x_4'$, $x_4=x_1'-x_2'+x_3'-x_4'$. **269.** $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ \sqrt{3})$, $(0,\ -\sqrt{3})$, $x=x'-\frac{y'}{\sqrt{3}}+1$, $y=x'+\frac{y'}{\sqrt{3}}+1$. **270.** $x'y'=0$.

Литература

[1] Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. *Сборник задач по аналитической геометрии*. М. Наука. 1964.

[2] Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре*. М. Наука. 1967. 384 с.

[3] Цубербиллер О.Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*. М. Наука. 1964.

[4] Шурыгин В.В. *Векторная алгебра и ее применение в аналитической геометрии плоскости*. Учебное пособие к курсу аналитической геометрии. Казанск. ун-т. 2001. 50 с.

[5] Шурыгин В.В. *Векторная алгебра и ее применение в аналитической геометрии пространства*. Учебное пособие к курсу аналитической геометрии. Казанск. ун-т. 2002. 72 с.

Содержание