КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**Составитель**

*доцент Е.П.Аксентьева*

**Методические указания**

для студентов II курса

факультета географии и геоэкологии

КАЗАНЬ

2010

Пособие составлено для студентов второго курса факультета географии и геоэкологии по специальности 021.300 "Картография и геоинформатика", состоит из методических разработок пяти тем. В каждой приводятся основные понятия и определения, разбираются типичные примеры, даются задачи. Предлагается задание для подготовки к контрольной работе. Используя пособие, студенты имеют возможность изучить предлагаемые темы самостоятельно.

## Содержание

# ТЕМА 1

## ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

**Определение**. *Комплексным числом называется выражение вида* $z = x + iy$, *где* $x$ *и* $y$*– вещественные числа, а* $i = \sqrt{-1}$ *– так называемая мнимая единица,* $i^2 = -1$. *Число* $x$ *называется вещественной или действительной частью комплексного числа и обозначается* $x = \operatorname{Re} z$, $y$ *называется мнимой частью комплексного числа и обозначается* $y = \operatorname{Im} z$.

Обозначение Re произошло от латинского слова realis – действительный, а Im – от imaginarius (мнимый).

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ в качестве подмножества содержит множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел, т.к. при $y = 0$ получим $z = x$.

Форма комплексного числа $z = x + iy$ называется его *декартовой* формой.

Число $z$ равно 0 тогда и только тогда, когда $x = 0$ и $y = 0$.

Число $\overline{z} = x - iy$ называется комплексно-сопряженным с $z$.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$.

По определению: равенство $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.

Рассмотрим действия над комплексными числами $z_1$, $z_2$:

сумма $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$,

разность $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$,

произведение комплексных чисел вводится как произведение двучленов с учетом того, что $i^2 = -1$: $z_1\, z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)$.

Например, $z\overline{z} = x^2 + y^2$ – вещественное число.

Деление комплексных чисел: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{1}{z_2\overline{z}_2} z_1\,\overline{z}_2 = \frac{1}{x_2^2+y_2^2} z_1\overline{z}_2$, т.е. деление свелось к произведению комплексных чисел.

**Примеры.** 1) Пусть $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 1 + i$. Тогда имеем

$z_1 + z_2 = 2 - 3i + 1 + i = 3 - 2i,\ z_1 - z_2 = 2 - 3i - 1 - i = 1 - 4i,$

$z_1 z_2 = (2 - 3i)(1 + i) = 2 - 3i + 2i - 3i^2 = 5 - i,$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i.$

2) Решим квадратное уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$.

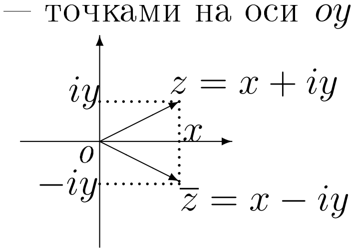
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{9}\sqrt{-1} = 2 \pm 3i$

Здесь дискриминант $D < 0$, $x_2 = \overline{x}_1$, т.е. корни комплексно–сопряжённые, и имеет место равенство

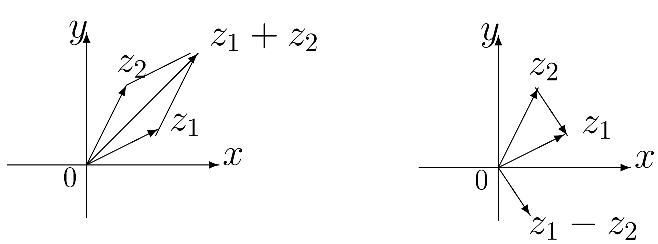
$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = x^2 - 4x + 13.$

*ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА*

По определению комплексное число задаётся двумя вещественными числами $(x, y)$. В свою очередь два вещественных числа определяют точку в декартовой системе координат. Эта точка (ее тоже будем называть $z$), а также радиус-вектор $\overrightarrow{oz} = \{x,\, y\}$ дают геометрическую интерпретацию комплексного числа. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью $z$. На этой плоскости ось $ox$ называется вещественной осью, а ось $oy$ — мнимой осью, т.к. вещественные числа $z = x$ изображаются точками оси $ox$, а числа $z = iy$ (их называют "чисто" мнимыми) — точками на оси $oy$.




Если использовать операции сложения и вычитания векторов $\overrightarrow{oz_1} = \{x_1, y_1\}$ и $\overrightarrow{oz_2} = \{x_2, y_2\}$: $\overrightarrow{oz_1} \pm \overrightarrow{oz_2} = \{x_1 \pm x_2,\ \ y_1 \pm y_2\}$, то сложению и вычитанию комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ можно дать геометрическую интерпретацию:



## З А Д А Ч И

$\boxed{\mathbf{1}}$ Изобразить на комплексной плоскости комплексные числа $z$ и сопряженные к ним:

$z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = -3 - 4i,\ z_3 = 2i,\ z_4 = -\sqrt{3} + i,\ z_5 = 3,\ z_6 = -8,$
$z_7 = -5i,\ z_8 = 3 + 4i.$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Выполнить арифметические действия над комплексными числами (с геометрической интерпретацией $z_1 \pm z_2$ ).

1) $z_1 = -1 + 3i,\ z_2 = 2 + 4i,$ 2) $z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = -1 + 5i,$

3) $z_1 = 2i,\ z_2 = 1 + i,$ 4) $z_1 = 2 - i,\ z_2 = 5i,$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Вычислить:

1) $(3 - 2i)^2,$ 2) $(1 + i)^3,$ 3) $i^{2011},$ 4) $(-i)^{2012}.$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Решить уравнения:

1) $x^2 + 25 = 0,$ 2) $x^2 + 49 = 0,$

3) $x^2 - 2x + 5 = 0,$ 4) $x^2 + 4x + 13 = 0,$

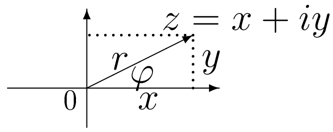
5) $x^2 - 4x + 7 = 0,$ 6) $x^2 - 2x + 2 = 0.$

## ТЕМА 2

## ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ЛИНИИ И ОБЛАСТИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Умножению комплексных чисел не соответствуют ни скалярное, ни векторное произведения векторов. Чтобы выяснить геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел, перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Тогда $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической*. Если воспользоваться формулой Эйлера (ее доказательство даётся в разделе "Числовые ряды") $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то получим *показательную* форму комплексного числа: $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$.

Полярные радиус $r$ и угол $\varphi$ для комплексного числа $z$ называются: $r = |z|$ – модуль комплексного числа, $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа $z$.




$\operatorname{Arg} z$ является многозначной функцией. Ее значения для данного $z$ отличаются одно от другого на целое кратное $2\pi$. Для $z = 0$ аргумент не определен. Обычно используют гдавное значение аргумента $\arg z$, определяемое дополнительным условием $-\pi < \arg z \leq \pi$. Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Если $z = x + iy$, то найти $|z|$ и $\arg z$ можно так: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$, откуда $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, если $z$ в первой или четвёртой четвертях; $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$, если $z$ во второй четверти, $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$, если $z$ в третьей четверти. Заметим, что $\arg z = \pi/2$ (или $-\pi/2$), если $x = 0$, $y > 0$ (или $y < 0$).

**Пример**. Представить комплексное число $z = -2 + 3i$ в показательной форме.

Здесь $r = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, $\operatorname{tg} \varphi = -3/2$. Отсюда, т.к. $z$ находится во второй четверти, то $\varphi = -\operatorname{arctg}(3/2) + \pi$. Поэтому $z = \sqrt{13}\, \mathrm{e}^{[-\operatorname{arctg}(3/2) + \pi] i}$.

Пусть $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2}$. Тогда

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

$z_1 z_2 = r_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1} r_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

( Здесь мы поступили по аналогии с действием умножения двух значений показательной функции вещественного переменного: $\mathrm{e}^{x_1} \mathrm{e}^{x_2} = \mathrm{e}^{x_1 + x_2}$. Строгое доказательство этого равенства получится, если использовать тригонометрическую форму комплексных чисел).

Аналогично получим

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Итак, у произведения $z_1 z_2$ модуль равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей. У частного $\frac{z_1}{z_2}$ модуль равен отношению модулей, а аргумент — разности аргументов делимого и делителя. Это позволяет геометрически их построить.

В частности, умножение вектора $z$ на $\mathrm{e}^{i\varphi}$ означает его поворот на угол $\varphi$ вокруг начала координат.

## З А Д А Ч И

$\boxed{\mathbf{5}}$ Изобразить на комплексной плоскости комплексные числа в показательной форме :

$$z_1 = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}},\ z_2 = 3\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}},\ z_3 = \mathrm{e}^{-\frac{3\pi i}{4}},\ z_4 = 4\mathrm{e}^{\frac{3\pi i}{4}},\ z_5 = 5\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}},\ z_6 = \mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{6}}.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Найти и изобразить на комплексной плоскости произведения

$w_1 = z_1 z_3,\ w_2 = z_2 z_4,\ w_3 = z_1 z_5,\ w_4 = z_2 z_6$ (см. $\boxed{\mathbf{5}}$).

$\boxed{\mathbf{7}}$ Представить комплексные числа в декартовой форме, применив формулу Эйлера:

$$z_1 = e^{2+3i},\ z_2 = e^{-1+3i},\ z_3 = e^{4i},\ z_4 = e^{-5i}.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Представить комплексные числа в показательной форме (взяв главные значения аргумента):

$$z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + i,\ z_3 = -\sqrt{3} + i,\ z_4 = \sqrt{3} - i,$$
$$z_5 = -5i,\ \ z_6 = 6i,\ \ z_7 = -64,\ \ z_8 = 4.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Каков геометрический смысл выражения $|z_1 - z_2|$ ?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Определить кривые и построить их:

1) $|z - a| = r$, 2) $|z - 2| + |z + 2| = 5$, 3) $|z + i| = 2$,
4) $|z - 1 + i| = 3$, 5) $z = 3\mathrm{e}^{it}, 0 \le t \le \pi$, 6) $z = z_1 + (z_2 - z_1)t,\ 0 \le t \le 1$,
7) $|z| = 1 - \operatorname{Re} z$, 8) $z = 2 + 3\mathrm{e}^{it},\ -\pi \le t \le 0$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Построить геометрические места точек по условиям:

1) $|z - a| < r$, 2) $|z| < 2,\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$, 3) $|z| < 3$, 4) $|z| > 3$,
5) $|z - i| < 1$, 6) $|z + 1 - i| < 2$, 7) $|z + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}| > 1$, 8) $|z - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}| > 2$,
9) $2 < |z| < 4,\ -\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}$, 10) $0 < \mathrm{Re} z < 2$,
11) $-\infty < \mathrm{Re} z < 0,\ 0 < \mathrm{Im} z < \pi$, 12) $1 < \mathrm{Re} z < +\infty,\ \pi < \mathrm{Im} z < 2\pi$.

## ТЕМА 3

## ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ . ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

При возведении числа $z = re^{i\varphi}$ в степень $n \in \mathbb{N}$ как следствие из умножения комплексных чисел имеем:

$z^n = r^n e^{in\varphi}$. При $r = 1$ отсюда получаем формулу Муавра

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$.

Рассмотрим извлечение корня из комплексного числа, т.е. найдем $z = \sqrt[n]{w}$, где комплексное число $w$ задано. Представим $w$ в показательной форме $w = \rho e^{i\theta}$, а $z$ будем искать в показательной форме $z = re^{i\varphi}$. Из равенства $z^n = w$ имеем $r^n e^{i\varphi n} = \rho e^{i\theta}$. Отсюда, учитывая (1), получим

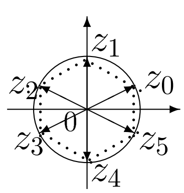
$r^n = \rho,\ \varphi n = \theta + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots.$

Тогда $r = \sqrt[n]{\rho},\ \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Существенно различных углов здесь будет всего $n$, т.е. $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots n-1$. Все остальные углы отличаются от этих на угол, кратный $2\pi$. Поэтому различных значений $\sqrt[n]{w}$ будет $n$:

$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta + 2k\pi)/n},\ k = 0,\ 1,\ \ldots n-1.$

**Пример**. Извлечь корень из комплексного числа, дать геометрическую интерпретацию: $\sqrt[6]{-64}$.

Из равенства $z = \sqrt[6]{-64}$ имеем $z^6 = -64 = 64e^{(2k+1)\pi i},\ k = \overline{0,5}$. Отсюда $z_k = \sqrt[6]{64} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{6}} = 2e^{\frac{(2k+1)\pi i}{6}}$. Все числа $z_k$ по модулю равны 2 и , следовательно, лежат на окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Точка $z_0 = 2e^{\pi i/6}$, каждая последующая точка получается из предыдущей поворотом на угол $\pi/3$. Если соединить точки $z_k$, получим правильный шестиугольник.



## ЗАДАЧИ

$\boxed{\mathbf{12}}$ Возвести в степень комплексные числа (см. $\boxed{\mathbf{8}}$):

1) $z_1^4$, 2) $z_2^6$, 3) $z_3^8$, 4) $z_4^5$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Извлечь корень из комплексного числа, дать геометрическую интерпретацию:

1) $\sqrt{6i}$, 2) $\sqrt[6]{-64i}$, 3) $\sqrt[3]{1-i}$, 4) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$, 5) $\sqrt{-i}$, 6) $\sqrt[3]{1}$,

7) $\sqrt[5]{32(1+\sqrt{3}i)}$, 8) $\sqrt[3]{-8}$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Решить уравнения:

1) $z^8-1=0$, 2) $z^3+1=0$, 3) $z^5+1-i=0$, 4) $z^3+i=0$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Используя формулу Муавра, доказать, что

1) $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$,

2) $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$, $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$.

## ТЕМА 4

## ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Рассмотрим некоторые элементарные функции комплексного переменного.

**1. Линейная функция** определяется соотношением

$w = az + b$, где $a$, $b$ – фиксированные комплексные числа, а $z$ – комплексное переменное. Она взаимно-однозначно отображает плоскость комплексного переменного $z$ в себя. Если рассматривать функцию $w$ на некоторой фигуре, то её образом будет тоже фигура. Учитывая, что $w = |a|\mathrm{e}^{i\arg a}z + b$, можно построить образы фигур.

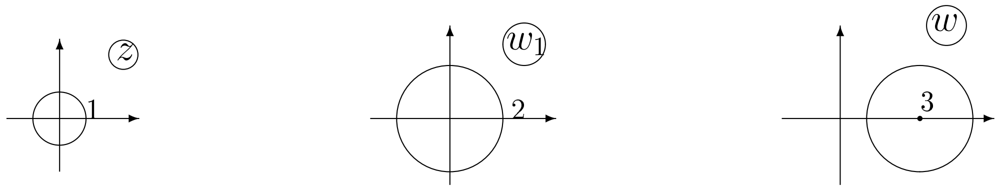
**Пример.** Найти образ $D_w$ круга $D_z : |z| < 1$, если $w = 2iz + 3$.

Рассмотрим функцию $w$ как суперпозицию нескольких функций:

$w_1 = 2z$, $w_2 = iw_1$, $w = w_2 + 3$.

Функция $w_1$ отобразит $D_z$ в $D_1 : |w_1| < 2$, т.к. $|w_1| = 2|z|$. Функция $w_2$ повернет круг $D_1$ на $\pi/2$ вокруг центра $w_1 = 0$, т.е. отобразит $D_1$ в себя.

Функция $w$ круг $D_1$ параллельно сдвинет на $3$. Следовательно, образом $D_w$ будет круг $|w-3|<2$.




**2. Показательная функция.** Определим функцию

$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+iy}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy}=\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y)$.

Отсюда следует, что $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{Arg}\mathrm{e}^z=y+2k\pi$, $k=0,\pm1,...$ Показательная функция является периодической с периодом $2\pi i:\ \mathrm{e}^{z+2\pi i}=\mathrm{e}^z$.

**3. Тригонометрические функции.** Для вещественных значений $x$ из формулы Эйлера имеем

$\cos x=\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2},\ \sin x=\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}$.

Используем эти формулы для определения тригонометрических функций комплексного аргумента:

$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i},\ \mathrm{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \mathrm{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}$.

**4. Логарифмическая функция.** Определим многозначную логарифмическую функцию $w=\mathrm{Ln}\,z$ как обратную к показательной. Тогда $\mathrm{e}^w=z$ и при $w=u+iv$ получим $\mathrm{e}^u\mathrm{e}^{iv}=|z|\mathrm{e}^{i\arg z}$, откуда имеем $u=\ln|z|$, $v=\arg z+2\pi k=\mathrm{Arg}\,z\Longrightarrow w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z$.

**Пример.** Решить уравнение $\cos z=i$.

По определению имеем:

$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2}=i$. Отсюда $\mathrm{e}^{2iz}-2i\mathrm{e}^{iz}+1=0\Longrightarrow \mathrm{e}^{iz}=i\pm\sqrt{-2}=i\pm i\sqrt{2}=i(1\pm\sqrt{2})\Longrightarrow iz=\mathrm{Ln}i(1\pm\sqrt{2})=\ln(\sqrt{2}\pm1)\pm i\pi/2+2k\pi i$,
$z=\pm\pi/2+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}\pm1),\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,...$

## ЗАДАЧИ

$\boxed{\mathbf{16}}$ Найти образ круга $|z|<1$, если:

1) $w=3z$, 2) $w=4iz$, 3) $w=-4iz-1$, 4) $w=-iz+2$,
5) $w=-2iz+1-2i$, 6) $w=2iz+3-i$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Найти образ круга $|z| < r$, если $w = az + b$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Решить уравнения:

1) $\mathrm{e}^z = -3 + 4i$, 2) $\mathrm{e}^z = 1 + i$, 3) $\sin z = 3$, 4) $\mathrm{tg} z = 1 + 2i$.

$\boxed{\mathbf{19}}$ Пусть $w = \mathrm{e}^z$. Найти образ области:

1) $-\infty < \mathrm{Re} z < 0,\ 0 < \mathrm{Im} z < \pi$,

2) $0 < \mathrm{Re} z < +\infty,\ 0 < \mathrm{Im} z < \pi/2$.

## ТЕМА 5

## НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МНОГОЧЛЕНАХ

Многочленом называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n,\ n \in \mathbb{N},$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – коэффициенты, в общем случае комплексные. Число $x_1$ называется корнем многочлена, если $P_n(x_1) = 0$.

Имеют место следующие утверждения.

1°. Многочлен $P_n(x)$ с вещественными или комплексными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный или комплексный корень (без доказательства).

2°. Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на линейный множитель $(x - c)$ равен $P_n(c)$, причём $P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x) + P_n(c)$.

Доказательство. Деля углом $P_n(x)$ на $x - c$ получим в частном некоторый многочлен степени $n - 1$, а в остатке $A = const$. Поэтому имеем тождество $P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x) + A$. Полагая в нём $x = c$, получим $A = P_n(c)$.

3°. Следствие из теоремы Безу. Для того чтобы число $x = c$ было корнем многочлена $P_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $P_n(x)$ без остатка делился на $(x - c)$, т.е. $P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x)$.

4°. Основная теорема алгебры.

Многочлен $P_n(x)$ с вещественными или комплексными коэффициентами имеет ровно $n$ корней, вещественных или комплексных.

Доказательство. Т.к. многочлен имеет хотя бы один корень $x_1$, то из 3° следует тождество $P_n(x) = (x - x_1)\,P_{n-1}(x)$. В свою очередь, $P_{n-1}(x)$ тоже многочлен, и хотя бы один корень $x_2$ у него есть, поэтому $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\,P_{n-2}(x)$. Продолжая последовательно понижать степень многочлена в правой части равенства, придём к тождеству

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)P_0,$$

откуда сравнением коэффициентов при $x^n$ получим $P_0 = a_0$.

$5^\circ$. Рассмотрим случай многочлена $P_n(x)$ с вещественными коэффициентами.

Докажем, что, если $x_1 = \alpha + i\beta$, то существует второй корень $x_2 = \overline{x}_1 = \alpha - i\beta$.

Действительно, пусть $P_n(\alpha + i\beta) = 0 \Longleftrightarrow a_0(\alpha + i\beta)^n + a_1(\alpha + i\beta)^{n-1} + ... + a_n = 0$. Возьмём в последнем равенстве комплексное сопряжение: $a_0(\alpha - i\beta)^n + a_1(\alpha - i\beta)^{(n-1)} + ... + a_n = 0. \Longleftrightarrow P_n(\alpha - i\beta) = 0$

Теперь по основной теореме алгебры имеем

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n),$$

где комплексные корни входят парами, причём $(x - x_1)(x - \overline{x}_1) = x^2 + px + q$, $p^2 - 4q < 0$. Кроме того, корни как вещественные, так и комплексные, могут быть кратными. Поэтому после переобозначения корней окончательно имеем

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}...(x-\alpha_m)^{r_m}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{k_s}, \quad (2)$$

где все скобки различны, $n = r_1 + r_2 + ...r_m + 2k_1 + ... + 2k_s$, $\alpha_1, \alpha_2 ...\alpha_m$ — вещественные, различные, $p_j^2 - 4q_j < 0$, $j = \overline{1, s}$.

**Пример.** Найти корни многочлена $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ и разложить его на множители с вещественными коэффициентами, т.е. представить в виде (2).

Целочисленные корни многочлена являются делителями его свободного члена. Учитывая это, подберём корень $x_1 = 1$. Деля углом $P(x)$ на $(x - 1)$, получим $x^2 - 2x + 5$, откуда $x_2 = 1 + 2i$, $x_3 = 1 - 2i$. Разложение на множители имеет вид: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x - 1)(x^2 - 2x + 5)$.

## З А Д А Ч И

$\boxed{\mathbf{20}}$ Найти корни многочленов $P(x)$ и разложить их на множители с вещественными коэффициентами в виде (2):

1) $P(x) = x^2 + 4x + 3$, 2) $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$,
3) $P(x) = x^2 + 2x + 10$, 4) $P(x) = x^3 - 8$, 5) $P(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3$,
6) $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, 7) $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, 8) $P(x) = x^5 + 8x^3 + 16x$,
9) $P(x) = x^4 - 1$, 10) $P(x) = x^4 + 4x^2 + 3$, 11) $P(x) = x^4 + 4$,
12) $P(x) = x^5 - 10x^3 + 9x$, 13) $P(x) = x^8 - 2x^4 + 1$, 14) $P(x) = x^8 - 1$,
15) $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$, 16) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 10$, 17*) $P(x) = x^6 + 64$.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

### ВАРИАНТ 1

1°. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если

$z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$. Изобразить на комплексной плоскости комплексное число $z_1$ и сопряженное с ним.

2°. Решить уравнение: $x^2 + 10x + 29 = 0$.

3°. Извлечь корень из комплексного числа, изобразить на комплексной плоскости результат: $\sqrt[6]{64i}$.

4°. Найти корни многочлена и разложить его на множители с вещественными коэффициентами: $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$.

5°. Найти образ круга $|z| > 3$, если $w = (1 + i)z + 4i$.

### ВАРИАНТ 2

1°. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если

$z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 + i$. Изобразить на комплексной плоскости комплексное число $z_1$ и сопряженное с ним.

2°. Решить уравнение:

$2x^2 + 4x + 3 = 0$.

3°. Извлечь корень из комплексного числа, изобразить на комплексной плоскости результат:

$\sqrt[4]{-5 - 5i}$.

4°. Найти корни многочлена и разложить его на множители с вещественными коэффициентами: $x^4-4x^3+4x^2+4x-5$.

5°. Найти образ круга $|z|<3$, если $w=(2+3i)z+i-6$.

## ОТВЕТЫ

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1) $z_1+z_2=1+7i$, $z_1-z_2=-3-i$, $z_1\,z_2=-14+2i$, $z_1/z_2=(1+i)/2$
2) $z_1+z_2=2+3i$, $z_1-z_2=4-7i$, $z_1\,z_2=7+17i$, $z_1/z_2=-(1+i)/2$,
3) $z_1+z_2=1+3i$, $z_1-z_2=-1+i$, $z_1\,z_2=-2+2i$, $z_1/z_2=1+i$,
4) $z_1+z_2=2+4i$, $z_1-z_2=2-6i$, $z_1\,z_2=5+10i$, $z_1/z_2=-(1+2i)/5$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1) $5-12i$, 2) $2i-2$, 3) $-i$, 4) $1$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 1) $x_{1,2}=\pm 5i$, 2) $x_{1,2}=\pm 7i$, 3) $x_{1,2}=1\pm 2i$, 4) $x_{1,2}=-2\pm 3i$,
5) $x_{1,2}=2\pm i\sqrt{3}$, 6) $x_{1,2}=1\pm i$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $w_1=-2i$, $w_2=12\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}}$, $w_3=10\mathrm{e}^{\frac{5\pi i}{12}}$, $w_4=3\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $z_1=\mathrm{e}^2(\cos 3+i\sin 3)$, $z_2=\mathrm{e}^{-1}(\cos 3+i\sin 3)$, $z_3=\cos 4+i\sin 4$,
$z_4=\cos 5-i\sin 5$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ $z_1=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{4}}$, $z_2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}}$, $z_3=2\mathrm{e}^{\frac{5\pi i}{6}}$, $z_4=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{6}}$, $z_5=5\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}}$,
$z_6=6\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}}$, $z_7=64\mathrm{e}^{\pi i}$, $z_8=4$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ 1) Окружность, 2) эллипс, 3) окружность, 4) окружность,
5) дуга окружности, 6) отрезок прямой, 7) парабола, 8) дуга окружности.

$\boxed{\mathbf{12}}$ 1) $-4$, 2) $-8i$, 3) $256\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}$, 4) $32\mathrm{e}^{-\frac{5\pi i}{6}}$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ 1) $z_{1,2}=\pm\sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\pi i/4}$, 2) $z_k=2\,\mathrm{e}^{(-\pi/12+k\pi/3)i}$, $k=\overline{0,5}$,
3) $z_k=\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{(-\pi/12+2k\pi/3)i}$, $k=\overline{0,2}$, 4) $z_k=\sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{(-\pi/24+k\pi/2)i}$, $k=\overline{0,3}$,
5) $z_{1,2}=\pm\,\mathrm{e}^{-\pi i/4}$, 6) $z_k=\mathrm{e}^{2k\pi i/3}$, $k=\overline{0,2}$, 7) $z_k=2\,\mathrm{e}^{(\pi/15+2k\pi/5)i}$, $k=\overline{0,4}$,
8) $z_k=2\,\mathrm{e}^{(\pi/3+2k\pi/3)i}$, $k=\overline{0,2}$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ 1) $z_k=\mathrm{e}^{2k\pi i/8}$, $k=\overline{0,7}$, 2) $z_k=\mathrm{e}^{(\pi/3+2k\pi/3)i}$, $k=\overline{0,2}$,
3) $z_k=\sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{(3\pi/20+2k\pi/5)i}$, $k=\overline{0,4}$, 4) $z_k=\mathrm{e}^{(-\pi/6+2k\pi/3)i}$, $k=\overline{0,2}$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ 1) $|w|<3$, 2) $|w|<4$, 3) $|w+1|<4$, 4) $|w-2|<1$,
5) $|w-1+2i|<2$, 6) $|w-3+i|<2$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ $|w-b|<|a|r$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ 1) $z_k=\ln 5+i[(2k+1)\pi-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}]$, 2) $z_k=\frac{1}{2}\ln 2+i\pi(\frac{1}{4}+2k)$,

3) $z_k = \pi/2 + 2k\pi - i\ln(3 \pm 2\sqrt{2})$, 4) $z_k = \frac{1}{2}[(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}] + \frac{i}{4}\ln 5$.

Здесь везде $k = 0, \pm1, \pm2, ...$

$\boxed{\mathbf{19}}$ 1) $0 < |w| < 1$, $0 < \arg w < \pi$, 2) $1 < |w| < \infty$, $0 < \arg w < \pi/2$.

$\boxed{\mathbf{20}}$ 1) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $P(x) = (x+1)(x+3)$, 2) $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$, $P(x) = 2(x-2)(x-1/2)$, 3) $x_{1,2} = -1 \pm 3i$, 4) $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$, $P(x) = (x-2)(x^2+2x+4)$, 5) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 3$, $P(x) = x^3(x-3)^2$, 6) $x_1 = x_2 = i$, $x_3 = x_4 = -i$, $P(x) = (x^2+1)^2$, 7) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $P(x) = (x-1)^2(x+1)$, 8) $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 2i$, $x_4 = x_5 = -2i$, $P(x) = x(x^2+4)^2$, 9) $x_{1,2} = \pm1$, $x_{3,4} = \pm i$, $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, 10) $x_{1,2} = \pm i$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}i$, $P(x) = (x^2+3)(x^2+1)$, 11) $x_{1,2} = 1 \pm i$, $x_{3,4} = -1 \pm i$, $P(x) = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, 12) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm1$, $x_{4,5} = \pm3$, $P(x) = x(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$, 13) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$, $x_5 = x_6 = i$, $x_7 = x_8 = -i$, $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2$, 14) $x_{1,2} = \pm1$, $x_{3,4} = \pm i$, $x_{5,6} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$, $x_{7,8} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$, $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$, 15) $x_1 = 2$, $x_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$, $P(x) = (x-2)(x^2+x+1)$, 16) $x_1 = -2$, $x_{2,3} = (5 \pm \sqrt{15}i)/4$, $P(x) = (x+2)(2x^2-5x+5)$.