КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А. В. Аминова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Казань 2008

УДК 517.5

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета физического факультета
Казанского государственного университета

АМИНОВА А.В. Элементы теории множеств. – Казань, 2008.

Данное пособие представляет собой элементарное введение в курс математического анализа, который читается для студентов физического факультета в 1–3 семестрах. Оно содержит изложение четырех лекций, включающих основные понятия логики и теории множеств, восприятие которых требует определенных усилий от вчерашних школьников, как правило, не приученных мыслить абстрактными категориями и ясно формулировать свои выводы, чему отчасти способствует введение компьютерных методов обучения и контроля знаний, вытесняющих прямой диалог ученика и учителя.

Изложение сопровождается примерами, иллюстрациями и рисунками.

Рис. 21. Библиогр. 7 назв.

Р е ц е н з е н т
Доктор физико-математических наук,
профессор *К. Г. Гараев*

Редактор *И. Г. Кондратьева*
Компьютерный набор *А. Р. Филимоненко*, рисунки *П. Е. Кашаргин*

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1

1. Некоторые основные понятия и законы логики.

Пусть A и B – два высказывания (предложения). Введем следующие *обозначения.*

Утверждение, противоположное некоторому высказыванию, записывается так: $\neg A$, читается: "не A" ("*отрицание* A").

Символ $\Rightarrow$ означает *логическое следствие.* Отношение $A \Rightarrow B$ означает, что "A влечет за собой B" ("A влечет B").

Отношение $A \equiv B$ означает, что "A эквивалентно B".

$A \vee B$ означает *дизъюнкцию* ("A или B").

$A \wedge B$ означает *конъюнкцию* ("A и B").

Всякая теорема, вообще говоря, может быть записана формулой

$$A \Rightarrow B$$

("Если $A \ldots$, то $B \ldots$"), где A – *условие,* B – *заключение.* Обратная теорема, которая не всегда справедлива, запишется тогда в виде

$$B \Rightarrow A.$$

Если обе теоремы (данная и обратная к ней) справедливы, то A и B эквивалентны, и такую теорему можно записать в виде

$$A \Leftrightarrow B,$$

что также выражается в форме: "Для того, чтобы $A \ldots$, необходимо и достаточно ("*н. и д.*"), чтобы $B \ldots$", или также "Н. и д. условием справедливости A является выполнение B", или, наконец, "A имеет место тогда и только тогда, когда выполнено B".

Справедливы следующие предложения (основные законы логики).

I. $\boxed{\neg\neg A \equiv A}$ (*закон двойного отрицания*).

II. $\boxed{[A \Rightarrow B] \equiv [\neg B \Rightarrow \neg A]}$ (*закон ложного положения*),

читается: "Предложение $A \Rightarrow B$ верно тогда и только тогда, когда верно предложение $\neg B \Rightarrow \neg A$".

Мы будем рассматривать "истинные" и "ложные" высказывания. Истинным высказываниям приписывается значение 1, а ложным – 0.

III. $\boxed{A \wedge \neg A \equiv 0}$ (*закон противоречия*).

IV. $\boxed{A \vee \neg A \equiv 1}$ (*закон исключенного третьего*),

читается: "или A, или не A".

В математических формулировках часто встречаются выражения "для всех ..." и "существует ... такое, что ...". Они обозначаются символами соответственно $\forall$ и $\exists$ и называются *кванторами*:

$$\forall - \text{ "для всех ..."},$$

$$\exists - \text{"существует ... такое, что ..."}.$$

Кванторы $\forall$ и $\exists$ обычно сопровождаются некоторыми ограничениями, которые записываются в круглых скобках, например,

$$(\forall x \in \mathbf{R}),$$

или

$$(\exists y \in M,\ \varphi(y) < 1),$$

и т. д.

Пример. Условие непрерывности вещественной функции[1] φ вещественного переменного x в точке a с помощью кванторов записывается так:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) : |\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon, \quad (1)$$

читается: "Для любого положительного ε найдется δ, строго большее нуля, такое, что для всех $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполнено: $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon$".

Работая с кванторами, нужно помнить следующее.

1. Порядок следования кванторов имеет важное значение. Перестановка кванторов может существенно изменить заданное свойство и в некоторых случаях привести к ложному утверждению.

Пример. Переставив кванторы в истинном утверждении

$$(\forall x \in (0,1))(\exists y \in (1, +\infty)) : y = \frac{1}{x}$$

("Для всякой правильной дроби x, $0 < x < 1$, найдется обратное к ней число y, строго большее единицы"), придем к ложному выводу:

$$(\exists y \in (1, +\infty))(\forall x \in (0,1)) : y = \frac{1}{x}.$$

("Существует число y, обратное любой правильной дроби x").

2. Если квантору $\exists$ предшествует некоторое число других кванторов, то следующая за ним буква может оказаться функцией всех букв, фигурирующих в предыдущих кванторах.

Пример 1. В формуле (1) δ зависит от $\varepsilon : \delta = \delta(\varepsilon)$.

Пример 2. Пусть функция f непрерывна в каждой точке числовой оси. Это означает следующее:

$$(\forall a \in \mathbf{R})(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(a,\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) :$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

[1] См. лекцию 2.

Здесь δ зависит от чисел a и ε, входящих в кванторы, предшествующие квантору $\exists$. Может оказаться, что можно выбирать δ в зависимости только от ε, но не от a. Тогда можно записать

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall a \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) :$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

В этом случае говорят, что функция равномерно непрерывна. Это свойство значительно сильнее свойства функции быть непрерывной. Передвинув квантор $\exists$ влево, мы получили усиление свойства. Вообще, *чем раньше стоит квантор $\exists$, тем свойство сильнее* (если, конечно, перестановка кванторов не искажает свойства и не приводит к бессмыслице). Произведем, например, в последней формуле еще одну перестановку кванторов:

$$(\exists\delta > 0)(\forall a \in \mathbf{R})(\forall\varepsilon > 0)(\forall x, |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Это предложение означает, что функция f постоянна (предлагаю слушателям доказать это в качестве упражнения). Мы получили еще большее, если не сказать крайнее, усиление свойства непрерывности.

Теорема 1 *Отрицание $\neg A$ свойства A, содержащего свойство P и некоторое число n кванторов $\forall$ и $\exists$, получается заменой каждого квантора "для всех..." на квантор "существует... такое, что..." , каждого квантора "существует... такое, что..." на квантор "для всех..." и свойства P на его отрицание $\neg P$:*

$$\begin{cases} \forall \to \exists, \\ \exists \to \forall, \\ P \to \neg P. \end{cases} \qquad (2)$$

Доказательство. Предположим, что $n = 1$ и имеется утверждение A:

$$(\forall x, \text{удовлетворяющий } S) : P.$$

Выполнив замену символов по схеме (2), получим утверждение, противоположное A:

$$(\exists x, \text{удовлетворяющий } S) : \neg P,$$

т. е. $\neg A$. Наоборот, заменив в последнем предложении символы по схеме (2), получим его отрицание:

$$(\forall x, \text{удовлетворяющий } S) : \neg(\neg P) \equiv P,$$

т. е. $\neg(\neg A) \equiv A$, что доказывает теорему при $n = 1$. На случай любого числа n кванторов теорема распространяется по индукции.

Пример 1. Пусть функция f непрерывна в каждой точке числовой оси, т. е.

$$(\forall a \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) :$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Свойство функции быть разрывной получается отрицанием свойства непрерывности:

$$(\exists a \in \mathbf{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) :$$
$$|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Пример 2. Пусть функция f, определенная в окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}$, имеет своим пределом в точке x_0 число b. Это означает, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Тогда утверждение "Число b не является пределом функции f в точке x_0" равносильно следующему:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

2. Операции над множествами.

Перечислю стандартные обозначения и термины, которыми мы будем пользоваться.

Пусть $A, B, \ldots, E, F, G, \ldots, X, Y, Z$ – множества. Выражение

$$x \in E$$

означает: "x есть *элемент* (или *точка*) множества E", или также "x принадлежит E", а выражение

$$x \notin E$$

– "x не принадлежит E". Равенство

$$x = y$$

означает: "x равно y", т. е. x совпадает с y или равно y по определению, а выражение

$$x \neq y$$

– "x не равно y", т. е. x отлично от y.

Отношения *включения*:

$$A \subset B$$

– "A содержится в B" или

$$B \supset A$$

– "B содержит A", означают, что "A есть *подмножество* или, что то же, *часть* множества B", т. е.

$$(\forall x): \ (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то пишут

$$A = B$$

и говорят: "A равно B". Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Выражение

$$A \not\subset B$$

означает, что "A не является частью B".

Символ

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

обозначает часть A, состоящую из всех тех элементов $x \in A$, для которых истинно свойство $P(x)$, а символ

$$\emptyset = \{x \in A \mid x \neq x\}$$

– *пустое подмножество*, или *пустое множество*. Любые два пустые подмножества равны, поэтому пишем просто $\emptyset$, а не $\emptyset_A$.

$$\mathcal{P}(A)$$

есть множество всех частей множества A. Если A – конечное множество, состоящее из n элементов, то $\mathcal{P}(A)$ содержит всего

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

элементов.

Множество, состоящее из одного элемента x, обозначается символом

$$\{x\},$$

множество, состоящее из двух элементов x и y, – символом

$$\{x, y\}$$

и т. д.

Если $A \subset B$, то множество тех элементов из B, которые не принадлежат A:

$$\{x \in B \mid x \notin A\},$$

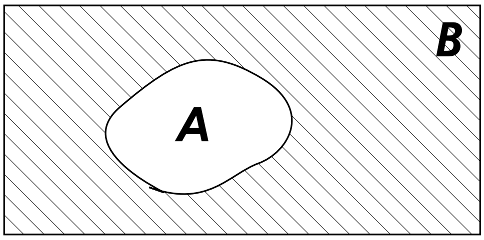

Рис. 1.

являющееся подмножеством множества B, называется *разностью между* B *и* A, или *дополнением* (*к*) A *в* B и обозначается одним из указанных ниже символов:

$$CA \equiv C_B A \equiv B\backslash A \equiv B - A$$

(см. рис. 1, где заштриховано дополнение к A в B).

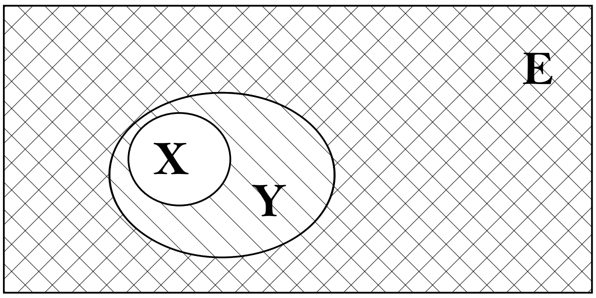

Рис. 2.

Пусть A, B, X, Y – части множества E. Тогда

$$CCY = Y,$$

$$E\backslash E = \varnothing, \quad E\backslash\varnothing = E,$$

$$(X \subset Y) \Rightarrow (CX \supset CY),$$

в последней формуле предполагается, что $CX = C_E X$, $CY = C_E Y$ (на рис. 2 дополнение к X в E заштриховано с наклоном влево, а дополнение к Y в E – с наклоном вправо).

$$A \cup B = B \cup A$$

есть *объединение множеств A и B* (заштрихованная часть на рис. 3). Оно состоит из элементов, принадлежащих, по крайней мере, одному из двух множеств A и B.

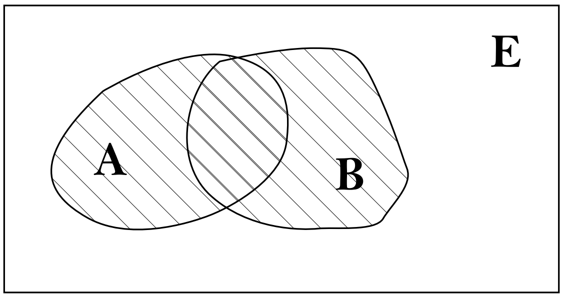

Рис. 3.

$$A \cap B = B \cap A$$

есть *пересечение множеств A и B* (заштрихованная часть на рис. 4). Это множество элементов, принадлежащих и A, и B:

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}.$$

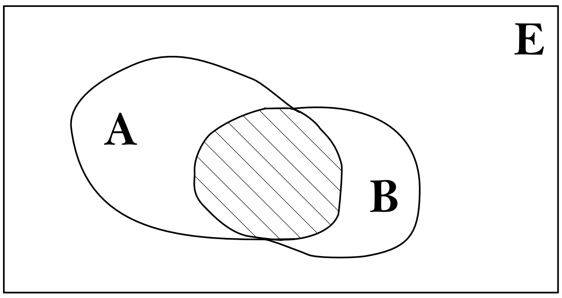

Рис. 4.

Пересечение дистрибутивно относительно объединения (рис. 5):

$$A \cap (X \cup Y) = (A \cap X) \cup (A \cap Y).$$

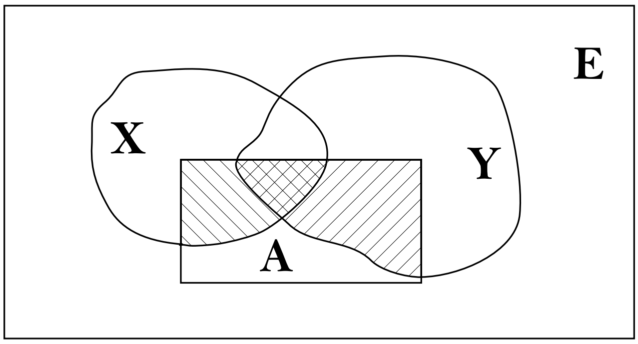

Рис. 5.

Объединение дистрибутивно относительно пересечения (рис. 6):

$$A \cup (X \cap Y) = (A \cup X) \cap (A \cup Y).$$

Кроме того, справедливы равенства:

$$C(X \cup Y) = (CX) \cap (CY),$$

$$C(X \cap Y) = (CX) \cup (CY)$$

(см. рис. 7, где дополнение к X в E заштриховано с наклоном влево, а дополнение к Y в E – с наклоном вправо).

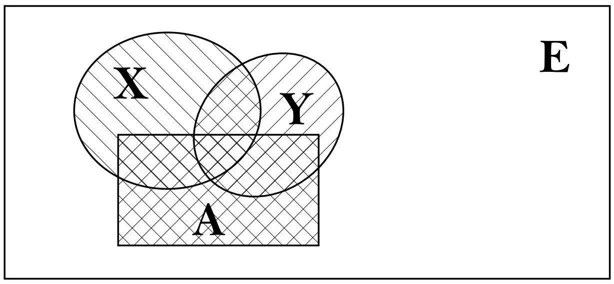

Рис. 6.

Таким образом, *преобразование* $X \to CX$ *переводит символ "содержится" в "содержит", символ "содержит" в "содержится", "объединение" в "пересечение" и "пересечение"*

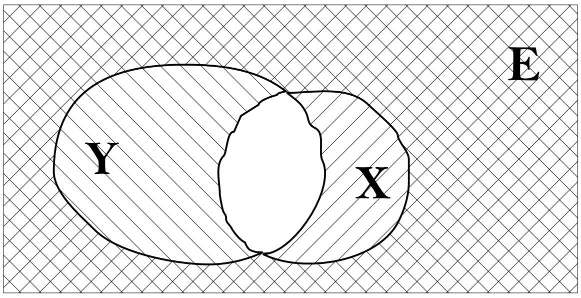

Рис. 7.

в "объединение", т. е., как говорят, "*обращает*" эти символы:

$$\boxed{\begin{array}{c} \subset \to \supset \\ \supset \to \subset \\ \cup \to \cap \\ \cap \to \cup \end{array}}$$

Совокупность всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in B$, называется *произведением множеств* A и B и обозначается символом

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

По определению произведение $E \times F \times G$ трех множеств E, F и G есть $(E \times F) \times G = E \times (F \times G)$:

$$E \times F \times G = (E \times F) \times G = E \times (F \times G),$$

а произведение n множеств определяется по индукции:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n = (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

элемент z произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ обозначается так:

$$z = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

x_i называется i-й проекцией элемента z:

$$x_i = pr_i(z) \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Если $X_1 = X_2 = \cdots = X_n$, то вместо $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ раз}}$ пишут X^n.

Примеры.

$\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел $1, 2, \ldots,$

$\mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел, как положительных, так и отрицательных, включая число 0,

$\mathbf{Q}$ – множество всех рациональных чисел,

$\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел,

$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n \text{ раз}}$ есть n-мерное арифметическое пространство, точка $x \in \mathbf{R}^n$ есть упорядоченный набор n вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n :\ x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$

– открытый промежуток (интервал),

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$$

– полуоткрытый промежуток,

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$$

– полуоткрытый промежуток,

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

– замкнутый промежуток (отрезок).

ЛЕКЦИЯ 2

1. Функции, или отображения.

Определение 1. Пусть E и F – два множества. *Отображением (из) E в F* или *функцией, определенной на E со значениями в F*, называется соответствие f, которое каждому элементу x из E относит некоторый элемент y из F, обозначаемый через $f(x)$:
$$y = f(x).$$
Элемент x из E называется *переменным*, а элемент y, или $f(x)$, из F называется *значением функции f в точке x* или *образом элемента x при отображении f*.

Множество E *называют областью определения функции f*. Мы будем говорить также, что *функция f определена на E*.

Множество $\{y = f(x) \mid x \in E\}$ всех значений функции f называется ее *областью значений*.

Если задано отображение f множества E в F, то это записывается в виде
$$x \to f(x),$$
или
$$E \xrightarrow{f} F.$$
Заметим, что символы x, f и $f(x)$ означают элементы трех различных множеств: $x \in E$, $f(x) \in F$, а f принадлежит множеству всех отображений из E в F, которое мы будем обозначать через F^E, так что $f \in F^E$:
$$\boxed{F^E \text{ – множество всех отображений из } E \text{ в } F.}$$
Два отображения f и g из E в F называются *равными*, если $f(x) = g(x)$ для любого $x \in E$.

Примеры.

1°. *Тождественное отображение.* Так называется отображение id_E множества E в E, определенное равенством

$$\mathrm{id}_E(x) = x,$$

$$\boxed{\mathrm{id}_E \text{ – тождественное отображение множества } E.}$$

2°. *Постоянное отображение.* Если для любого $x \in E$ значение функции f, определенной на E со значениями в F, есть один и тот же элемент $b \in F$, то f называется *постоянной функцией* или *постоянным отображением.*

3°. *Вещественной функцией вещественного переменного* называется отображение множества $E \subset \mathbf{R}$ в множество $F \subset \mathbf{R}$.

Определение 2. Пусть f – отображение множества E в F и $A \subset E$. Отображение, которое каждому элементу $x \in A$, рассматриваемому как элемент из E, ставит в соответствие $f(x) \in F$, называется *сужением* или *ограничением* функции f на A и обозначается символом f_A:

$$\boxed{f_A \text{ – сужение } f \text{ на } A \ \equiv \ \text{ограничение } f \text{ на } A.}$$

Отображение[2]:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & & \\ & \searrow & \\ & & \diamondsuit \\ & \nearrow & \\ \heartsuit & & \diamondsuit \\ \heartsuit & & \\ & \searrow & \\ & & \diamondsuit \\ & & \diamondsuit \end{array}}$$

Не отображения:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & & F \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ & \searrow & \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} E & & F \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ & & \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & & \end{array}}$$

2. Инъекции, сюръекции, биекции.

Определение 3. Отображение f множества E в F называется *инъективным отображением* или *инъекцией*, если для любых $x, x' \in E$ имеет место соотношение:

$$(\forall x, x' \in E) : (x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x')) \,,$$

[2]В этих и следующих таблицах в левом столбце стоят элементы множества, указанного в верхней строке слева, а в правом – элементы множества, указанного в верхней строке справа, стрелка $\rightarrow$ связывает элемент и его образ.

или, что равносильно,

$$(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x').$$

Иными словами, отображение f является инъекцией, если два различных элемента из E имеют образами при отображении f два различных элемента из F.

Инъекции:

$$\begin{array}{|ccc|}\hline E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ & & \diamondsuit \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|ccc|}\hline E & \xrightarrow{g} & G \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ & & \clubsuit \\ \hline\end{array}$$

Не инъекция:

$$\begin{array}{|ccc|}\hline E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ & \nearrow & \\ \heartsuit & & \diamondsuit \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ & & \diamondsuit \\ \hline\end{array}$$

Определение 4. Отображение f множества E в F называют *сюръективным отображением* или *сюръекцией*, если каждый элемент из F является образом при отображении f, по крайней мере, одного элемента из E, т. е. если

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E) : y = f(x).$$

Сюръекции:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ & \nearrow & \\ \heartsuit & & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & G \\ \heartsuit & \rightarrow & \clubsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \clubsuit \\ & & \\ \heartsuit & \rightarrow & \clubsuit \end{array}}$$

Не сюръекция:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ & \nearrow & \\ \heartsuit & & \diamondsuit \\ & & \diamondsuit \end{array}}$$

Определение 5. Отображение f множества E в F называется *взаимно однозначным* или *биективным отображением*, или также *биекцией*, если каждый элемент из F является образом при отображении f единственного элемента из E.

Отображение биективно тогда и только тогда, когда оно одновременно инъективно и сюръективно.

Биекция (конечного) множества на себя называется *перестановкой*.

Биекция:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \end{array}}$$

Отображение, которое не является
ни биекцией, ни сюръекцией, ни инъекцией[3]:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & G \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ & \nearrow & \\ \heartsuit & & \clubsuit \\ & & \clubsuit \end{array}}$$

Пусть f – биекция и y – произвольный элемент из F. Тогда существует единственный элемент x такой, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет биекцию множества F в E, которую называют *обратной биекцией* или *обратной функцией* (*обратным отображением*) к f и обозначают f^{-1}.

3. Образ и прообраз подмножества.

Определение 6. Пусть f – отображение множества E в F и A – часть E. Часть F, состоящая из всех элементов $f(x)$, где $x \in A$, называется *образом части* A *при отображении* f и обозначается символом $f(A)$:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A: \ y = f(x)\} \\ \text{– образ части } A \subset E \text{ при отображении } f : E \to F. \end{array}}$$

Определение 7. Если B – часть множества F, то часть множества E, состоящая из всех элементов x таких, что $f(x) \in B$, называется *прообразом части* B *при отображении* f и обозначается через $f^{-1}(B)$:

$$\boxed{\begin{array}{c} f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \\ \text{– прообраз части } B \subset F \text{ при отображении } f : E \to F. \end{array}}$$

[3] Пример показывает существование таких отображений.

Очевидно, что

$$f(\varnothing) = \varnothing, \quad f^{-1}(\varnothing) = \varnothing.$$

Замечание. Прообраз непустой части B может оказаться пустым множеством, если отображение f не сюръективно (рис. 8).

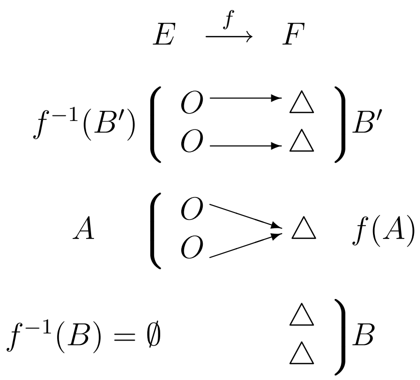

Рис. 8.

Определения 6 и 7 задают два отображения – отображение

$$A \to f(A)$$

множества $\mathcal{P}(E)$ всех частей множества E в множество $\mathcal{P}(F)$ всех частей множества F ("*образ*") и отображение

$$B \to f^{-1}(B)$$

множества $\mathcal{P}(F)$ всех частей множества F в множество $\mathcal{P}(E)$ всех частей множества E ("*прообраз*"). Эти отображения обладают следующими свойствами.

Прообраз f^{-1} сохраняет 5 символов: $\subset, \supset, \cap, \cup$ и C, т. е.

$$(B \subset B') \Rightarrow \left(f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')\right),$$

$$(B' \supset B) \Rightarrow \left(f^{-1}(B') \supset f^{-1}(B)\right),$$

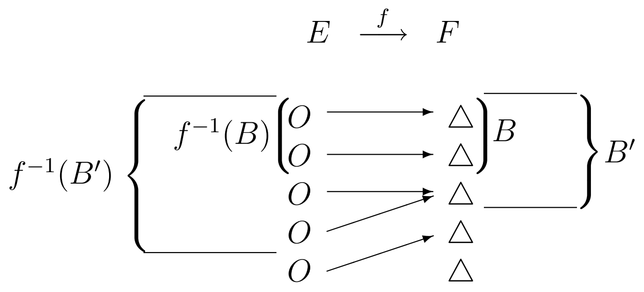

Рис. 9.

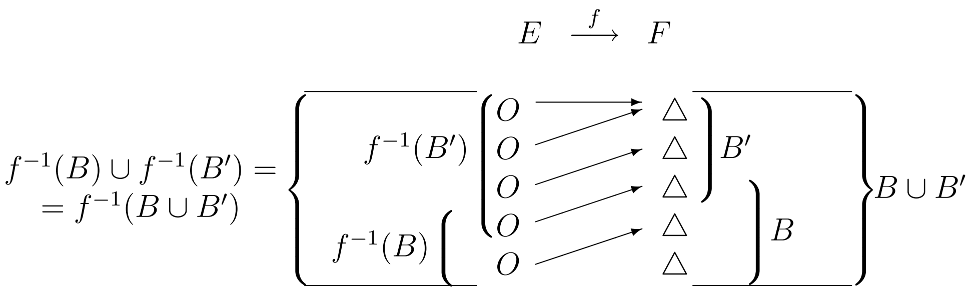

Рис. 10.

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'),$$
$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'),$$
$$f^{-1}(CB) = Cf^{-1}(B)$$

(рис. 9–12).

Образ f обладает менее простыми свойствами, сохраняя лишь операции включения и объединения (см. рис. 13–14):

$$(A \subset A') \Rightarrow (f(A) \subset f(A'))\,,$$
$$(A' \supset A) \Rightarrow (f(A') \supset f(A))\,,$$
$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'),$$
$$f(A \cap A') \subset (f(A) \cap f(A'))\,. \tag{3}$$

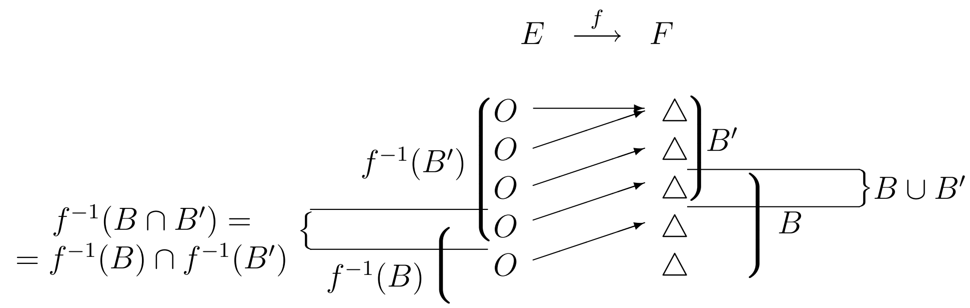

Рис. 11.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \end{array} & \\
f^{-1}(B') & \left(\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & \triangle \\ O & \longrightarrow & \triangle \\ O & \longrightarrow & \triangle \end{array}\right) & B \\
Cf^{-1}(B) = f^{-1}(CB) & \left(\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & \triangle \\ O & \longrightarrow & \triangle \\ & & \triangle \end{array}\right) & CB
\end{array}
$$

Рис. 12.

Покажем, что в общем случае $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$. Предположим, что в последней формуле стоит знак равенства, и рассмотрим случай

$$A \cap A' = \varnothing, \quad f(E) = \{b\}, \quad f(A) = f(A') = \{b\}$$

(см. рис. 15). Тогда, с одной стороны, $f(A) \cap f(A') = \{b\}$. С другой стороны, из равенства $A \cap A' = \varnothing$ следует $f(A \cap A') = f(\varnothing) = \varnothing$. Так как, по предположению, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$, то $\varnothing = \{b\}$. Полученное противоречие показывает, что в общем случае в формуле (3) имеет место лишь включение.

Легко убедиться в том, что если f – биекция, то образ при отображении f сохраняет все пять символов:

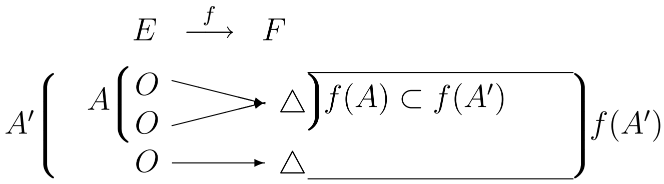

Рис. 13.

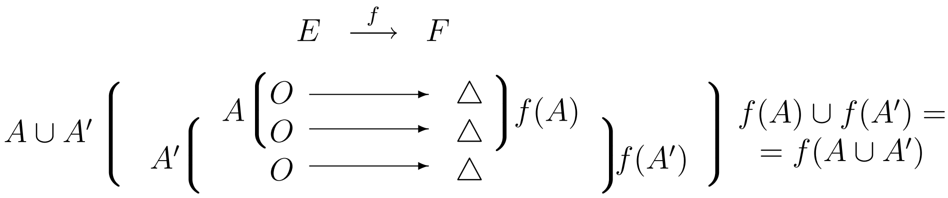

Рис. 14.

$$\boxed{f \text{ – биекция}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} (A \subset A') \Rightarrow (f(A) \subset f(A')), \\ (A' \supset A) \Rightarrow (f(A') \supset f(A)), \\ f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'), \\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A'), \\ f(CA) = Cf(A). \end{array}}$$

Если f – отображение множества E в F, то $f(E)$ – область значений функции f, а условие сюръективности отображения f с помощью образа записывается так: $f(E) = F$,

$$\boxed{f \text{ – сюръекция}} \Leftrightarrow \boxed{f(E) = F.}$$

4. Композиция отображений.

Пусть E, F и G – три множества, $f : E \to F$ – отображение множества E в F и $g : F \to G$ – отображение множества F в G (рис. 16).

Каждому $x \in E$ отображение f ставит в соответствие элемент $f(x)$ из F. Отображение g переводит $f(x)$ в $g(f(x)) \in G$.

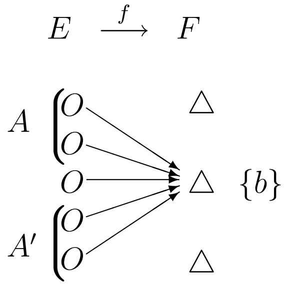

Рис. 15.

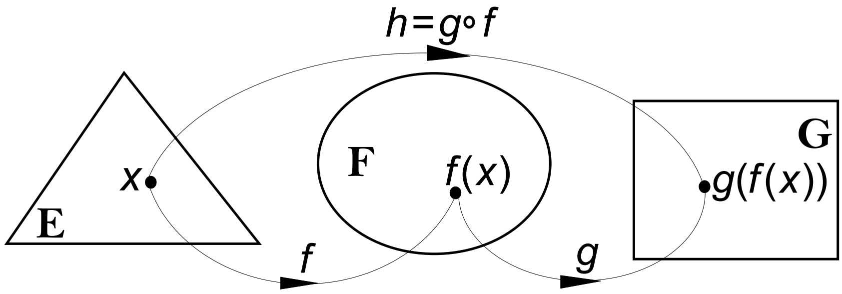

Рис. 16.

Тем самым определено отображение h множества E в множество G:

$$x \to h(x) = g(f(x)).$$

Это отображение называется *композицией отображения f на отображение g* (коротко – *композиция f на g*) и обозначается $g \circ f$ (*символ читается справа налево!*):

$$\boxed{h = g \circ f : \ x \to g(f(x)) - \text{ композиция } f \text{ на } g.}$$

Композиция отображений ассоциативна:

$$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3),$$

поэтому пишут просто $f_1 \circ f_2 \circ f_3$.

Если f и g – биекции, то их композиция $g \circ f$ также является биекцией. Кроме того, справедливы равенства (см. рис. 17):

$$\boxed{f \text{ и } g \text{ – биекции}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}, \\ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E, \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F. \end{array}}$$

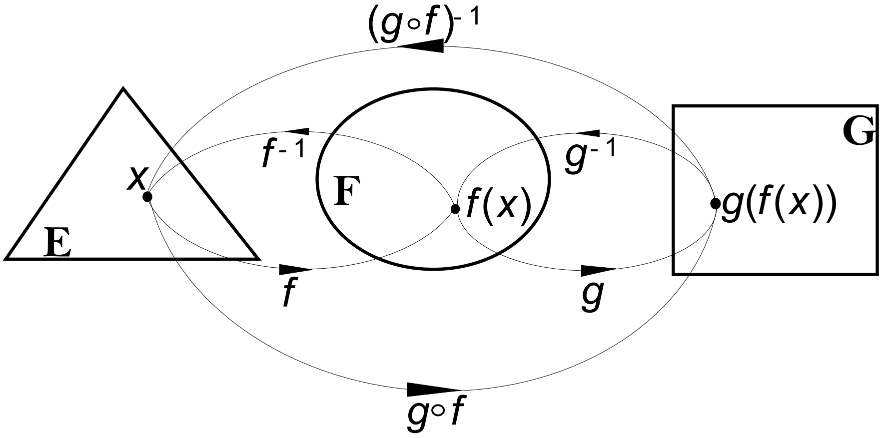

Рис. 17.

ЛЕКЦИЯ 3

1. Семейства. Последовательности.

Пусть заданы множество E и множество I, которое мы будем называть *множеством индексов*. Пусть также задано отображение множества индексов I в E: $i \to x_i$.

Определение 8. Множество, состоящее из x_i, где $i \in I$, обозначается

$$(x_i)_{i \in I} \text{ или } (x_i)$$

и называется *семейством элементов из* E, *снабженных индексами из* I.

Семейство (x_i) можно рассматривать как отображение множества I в E.

Определение 9. *Последовательностью* (x_n) *элементов из* E называется отображение множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел в множество E.

Последовательность записывают также в виде

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

x_n называют *n-м членом* (или *n-м элементом*) последовательности, или *членом* (*элементом*) *с номером* n.

Пусть (x_n) – некоторая последовательность элементов из E и (n_k) – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, т. е. строго возрастающее отображение[4] множества $\mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$: $k \to n_k,\ n_k < n_{k+1}$.

Последовательность $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$, определенная равенством $y_k = x_{n_k},\ k = 1, 2, \ldots$, называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n).

Примеры.

1°. *Вещественная числовая последовательность* – это отображение множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел в множество $\mathbf{R}$ вещественных чисел.

---

[4]См. лекцию 4, п. 3.

2°. Последовательности

$$(1, 1, \ldots, 1, \ldots) \text{ и } (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

являются подпоследовательностями числовой последовательности

$$(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots).$$

2. Покрытие. Разбиение.

Рассмотрим множество E и семейство $(A_i)_{i \in I}$ его подмножеств A_i.

Множество всех элементов $x \in E$, которые принадлежат хотя бы одному из подмножеств A_i, называется *объединением семейства* (A_i) и обозначается символом

$$\bigcup_{i \in I} A_i.$$

Пересечением семейства A_i:

$$\bigcap_{i \in I} A_i,$$

называется множество тех элементов $x \in E$, которые принадлежат одновременно всем A_i.

Если $I = \mathbf{N}$, то пишут

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $(A_i)_{i \in I}$ – семейство частей множества E и $X \subset E$. Говорят, что семейство (A_i) *покрывает множество* X или является его *покрытием*, если

$$X \subset \bigcup_{i \in I} A_i,$$

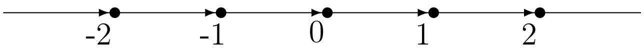

Рис. 18.

т. е. если множество X содержится в объединении семейства (A_i).

Пример. Семейство $(A_z)_{z\in\mathbf{Z}}$ интервалов $A_z = (z, z+2)$ покрывает числовую ось.

Определение 11. Семейство $(A_i)_{i\in I}$ подмножеств множества E называется *разбиением множества* $X \subset E$, если выполнены следующие условия:

1) семейство (A_i) покрывает X,

2) $(\forall i \in I) : A_i \neq \emptyset$ (множества A_i не пусты),

3) $[i \neq j] \Rightarrow [A_i \bigcap A_j = \emptyset]$ (множества A_i попарно не пересекаются).

Пример. Семейство $(A_z)_{z\in\mathbf{Z}}$, где $A_z = [z, z+1)$, образует разбиение числовой оси (рис. 18).

3. Отношение эквивалентности.

Бинарным отношением $\mathcal{R}$ на множестве E называется подмножество произведения $E \times E$, т. е. некоторое множество $\mathcal{R}$ пар (x, y) элементов x, y из E :

$$\boxed{\mathcal{R} \subset E \times E.}$$

Примеры бинарных отношений на числовой оси – множества пар $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ чисел $x, y \in \mathbf{R}$ таких, что $x = y$ или $x \leq y$, или $x^2 + y^2 = 1$, и т. д.

Определение 12. Бинарное отношение $\mathcal{R}$, определенное на множестве E, называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами:

1) *рефлексивность*: $(x, x) \in \mathcal{R}$ при любом $x \in E$,

2) *симметричность*: если $(x, y) \in \mathcal{R}$, то и $(y, x) \in \mathcal{R}$,

3) *транзитивность*: если $(x, y) \in \mathcal{R}$ и $(y, z) \in \mathcal{R}$, то $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Если $(x, y) \in \mathcal{R}$, то говорят, что x *эквивалентно* y и пишут

$$\boxed{x \sim y}, \text{ или } \boxed{x \equiv y}, \text{ или } \boxed{x \equiv y \mod \mathbf{R}}$$

(x *равно* y или x *конгруентно* y *по модулю* $\mathcal{R}$).

Примеры.

1°. E – множество прямых на плоскости. Две прямые считаются эквивалентными, если они параллельны или совпадают.

2°. Всякое разбиение $(A_i)_{i \in I}$ множества E задает отношение эквивалентности:

$$x \sim y, \text{ если } (\exists i \in I) : x, y \in A_i$$

(см. рис. 19).

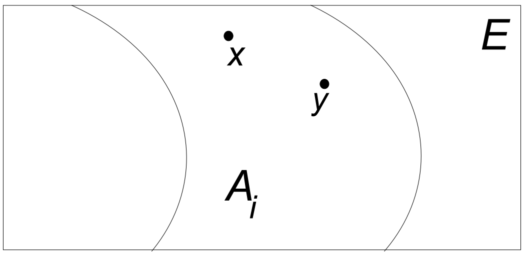

Рис. 19.

3°. E – подмножество множества $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, состоящее из всех пар (p, q) с $q \neq 0$. Отношение эквивалентности определяется формулой:

$$(p, q) \sim (p', q'), \text{ если } pq' - p'q = 0.$$

4°. Пусть E – множество всех векторов $\overrightarrow{AB}$ на плоскости. Отношение: $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$, если векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AB}$ параллельны, одинаковы направлены и имеют одинаковую длину, является отношением эквивалентности в E.

5°. В множестве E всех векторов $\overrightarrow{AB}$ на плоскости определим еще одно отношение эквивалентности, положив $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$, если векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AB}$ лежат на одной прямой, одинаковы направлены и имеют одинаковую длину.

Определение 13. *Классом эквивалентности $\dot{x}$ в E по отношению эквивалентности $\mathcal{R}$* называется часть множества E, образованная из всех элементов этого множества, эквивалентных некоторому заданному элементу x:

$$\boxed{\dot{x} = \{y \in E \mid y \sim x\}.}$$

Предложение 1. Любые два элемента y и z, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности $\dot{x}$ в E по отношению $\mathcal{R}$, эквивалентны между собой, т. е. если $y \in \dot{x}$ и $z \in \dot{x}$, то $y \sim z$.

Доказательство. $y \in \dot{x}$ означает, что $y \sim x$. Из соотношения $z \in \dot{x}$ следует, что $z \sim x$, отсюда в силу симметричности отношения эквивалентности получим $x \sim z$. Но тогда по свойству транзитивности имеем:

$$\boxed{(y \sim x) \wedge (x \sim z)} \Rightarrow \boxed{y \sim z,}$$

ч. т. д.

Предложение 2. Любые два класса эквивалентности в E по отношению $\mathcal{R}$ либо совпадают, либо не пересекаются:

$$\boxed{\dot{x} = \dot{y}} \vee \boxed{\dot{x} \cap \dot{y} = \varnothing.}$$

Доказательство: Пусть один и тот же элемент z принадлежит двум классам эквивалентности $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Это означает, что $z \sim x$ и $z \sim y$. По свойствам транзитивности и симметричности для любого элемента $t \in \dot{x}$ имеем

$$((t \sim x) \wedge (x \sim z) \wedge (z \sim y)) \Rightarrow (t \sim y),$$

следовательно, $t \in \dot{y}$, т. е. $\dot{x} \subset \dot{y}$. Так же доказывается, что $\dot{y} \subset \dot{x}$, поэтому $\dot{x} = \dot{y}$, ч. т. д.

Из предложений 1 и 2 вытекает, что отношение эквивалентности, введенное на множестве E, определяет разбиение E на непустые[5], попарно непересекающиеся части, объединение которых совпадает с E (рис. 20).

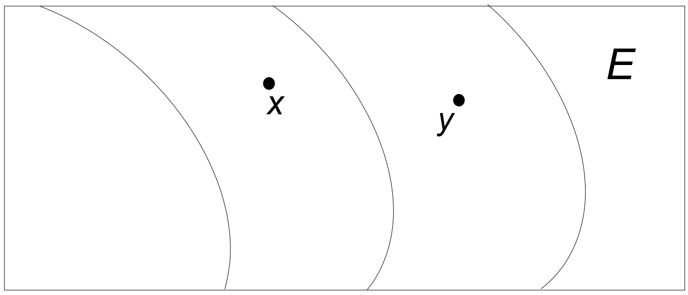

Рис. 20.

Определение 14. Множество всех классов эквивалентности множества E по отношению эквивалентности $\mathcal{R}$ называется *фактором* или *фактормножеством множества E по отношению* $\mathcal{R}$ и обозначается символом $E/\mathcal{R}$:

$$\boxed{E/\mathcal{R} \text{ – фактор множества } E \text{ по отношению } \mathcal{R}.}$$

В приведенном выше примере 1° фактор есть множество всех направлений на плоскости.

В примере 3° фактор совпадает с множеством всех рациональных чисел.

В примере 4° фактором является множество свободных векторов на плоскости. По определению свободный вектор есть класс всех эквивалентных между собой векторов.

В примере 5° фактор есть множество всех "скользящих векторов", используемых в механике. Каждый скользящий вектор является классом эквивалентности по отношению эквивалентности, введенному в этом примере.

[5]В силу свойства рефлексивности $x \in \dot{x}$ для любого элемента $x \in E$.

ЛЕКЦИЯ 4

1. Отношение порядка.

Определение 15. Бинарное отношение $\mathcal{R}$, определенное на множестве E, называется *отношением порядка* и обозначается символом $\le$ или $\le_R$, если оно

1) *рефлексивно:* $x \le x$ при любом x из E,

2) *транзитивно:* если $x \le y$ и $y \le z$, то $x \le z$:

$$\boxed{(x \le y) \wedge (y \le z) \Rightarrow (x \le z),}$$

3) *антисимметрично:* если $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$:

$$\boxed{(x \le y) \wedge (y \le x) \Rightarrow (x = y).}$$

Терминология и обозначения.

$x \le y$ читается: "x меньше y".

Отношение $y \ge x$ ("y больше x") по определению эквивалентно отношению $x \le y$:

$$\boxed{(y \ge x) \equiv (x \le y).}$$

Отношение $x < y$ ("x строго меньше y") означает, что $x \le y$ и $x \ne y$:

$$\boxed{x < y} \equiv \boxed{(x \le y) \wedge (x \ne y).}$$

Отношение $y > x$ ("y строго больше x") означает, что x строго меньше y :

$$\boxed{(y > x) \equiv (x < y).}$$

Определение 16. Множество E, на котором задано отношение порядка, называется *упорядоченным множеством.*

Отношение порядка на множестве E называется *полным*, а E – *вполне упорядоченным* или *линейно упорядоченным множеством*, если для любых двух элементов x, y из E выполняется одно из следующих трех условий: $x < y$, $x = y$ и $x > y$:

$$\boxed{(\forall x, y \in E) : (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y).}$$

Если множество E не вполне упорядоченное, то существуют x и y из E, не связанные никакими из трех указанных соотношений. О них говорят, что они *несравнимы.*

Примеры.

1°. Отношение $x \leq y$ в множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел, в множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, в множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел и в множестве $\mathbf{R}$ вещественных чисел является полным отношением порядка, а множества $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ – вполне упорядоченными множествами.

2°. Отношение включения $A \subset B$ есть отношение порядка на множестве $\mathcal{P}(E)$ подмножеств множества E. В общем случае это отношение порядка не является полным, ибо любые два непустых непересекающихся подмножеств множества E несравнимы.

3°. В произвольном множестве E отношение "$x \leq y$, если $x = y$" является отношением порядка. Такой порядок называется *хаотическим.*

2. Максимум и минимум. Точная верхняя и точная нижняя грани.

Определение 17. Пусть E – упорядоченное множество. Если существует такой элемент $a \in E$, что $x \leq a$ (соответственно $a \leq x$) для всех $x \in E$, то a называется *максимумом* (соответственно *минимумом*). Максимум и минимум обозначаются символами соответственно $\max E$ и $\min E$:

$$\boxed{\max E = \max_{x \in E} x \text{ – максимум множества } E,}$$

$$\boxed{\min E = \min_{x \in E} x \text{ – минимум множества } E.}$$

Предложение 3. Если E имеет максимум (соответственно минимум), то этот максимум (соответственно минимум) единствен.

Доказательство. Если a и b – два максимума множества E, то $a \leq b$ и $b \leq a$. В силу антисимметричности отношения прядка $\leq$ отсюда следует, что $a = b$. Случай минимума исчерпывается аналогично.

Примеры.

1°. $\mathcal{P}(X)$ – множество всех частей множества X, упорядоченное отношением включения $\subset$. Для любого $A \in \mathcal{P}(X)$ имеем: $\emptyset \subset A \subset X$, поэтому

$$\min \mathcal{P}(X) = \emptyset, \quad \max \mathcal{P}(X) = X.$$

2°. Множество $E = (0, 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ с обычным отношением $\leq$ имеет максимум $\max E = 2$, но не имеет минимума.

3°. Множества $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ с обычным отношением $\leq$ не имеют ни максимумов, ни минимумов. Множество $\mathbf{N}$ имеет минимум $\mathbf{N} = 1$, но не имеет максимума.

Определение 18. Пусть E – упорядоченное множество и $A \subset E$ – его подмножество. *Верхней гранью* (*верхней границей*) или *мажорантой* (соответственно *нижней гранью* (*нижней границей*) или *минорантой*) множества A называется любой элемент $a \in E$, для которого $x \leq a$ (соответственно $a \leq x$) при всех $x \in A$. Если такой элемент a существует, то часть A называют *ограниченной сверху* или *мажорируемой* (соответственно *ограниченной снизу* или *минорируемой*) и говорят, что *a ограничивает сверху* или *мажорирует* (соответственно *a ограничивает снизу* или *минорирует*) часть A.

Если подмножество одновременно мажорируемо и минорируемо, т. е. имеет верхнюю и нижнюю грани, то оно называется *ограниченным.*

Определение 19. Пусть A – часть множества E. Говорят, что часть A *имеет точную верхнюю грань*, если множество её верхних граней (мажорант) имеет минимум. Этот минимум называется *точной верхней гранью*, или *супремумом* множества A и обозначается $\sup_E A$ или $\sup A$:

$$\boxed{\sup_E A \text{ – точная верхняя грань множества } A \subset E.}$$

Если множество минорант части $A \subset E$ имеет максимум, то этот максимум называют *точной нижней гранью*, или *инфимумом* множества A и обозначают $\inf_E A$ или $\inf A$:

$$\boxed{\inf_E A \text{ – точная нижняя грань множества } A \subset E.}$$

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений.

1. Если точная верхняя грань части A принадлежит A, то она является максимумом, и наоборот:

$$\boxed{b = \sup A \in A} \Longleftrightarrow \boxed{b = \max A.}$$

Аналогично:

$$\boxed{a = \inf A \in A} \Longleftrightarrow \boxed{a = \min A.}$$

2. Если $A \neq \emptyset$, то $\inf A \leq \sup A$.

3. Если $A \subset B$ и существуют $\sup A$ и $\sup B$, то $\sup A \leq \sup B$.

4. Если существуют $\inf A$ и $\inf B$, то $\inf B \leq \inf A$.

Примеры.

1°. Пусть A – ограниченное подмножество $(0, 2]$ множества $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Любое число $b \geq 2$ – его верхняя граница (мажоранта) , любое число $a \leq 0$ – его нижняя граница (миноранта), $\sup A = \max A = 2,\ \inf A = 0$.

2°. Если $A = \{1, 10\}$ – множество, состоящее из двух элементов: 1 и 10, то $\sup\{1, 10\} = \max\{1, 10\} = 10$. Аналогично: $\inf\{0, 2, 1/2\} = \min\{0, 2, 1/2\} = 0$.

3°. В множестве $\mathcal{P}(E)$ всех частей множества E при отношении порядка $A \subset B$ каждое подмножество F имеет супремум и инфимум. В самом деле, пусть например, $F = \{A, B, C\}$. Тогда $\sup F = A \cup B \cup C$, $\inf F = A \cap B \cap C$.

3. Монотонные функции.

Пусть E и F – два упорядоченных множества. Отображение f множества E в F называется *возрастающим* отображением, если

$$\boxed{x \leq y} \Rightarrow \boxed{f(x) \leq f(y),}$$

и *убывающим* отображением, если

$$\boxed{x \leq y} \Rightarrow \boxed{f(x) \geq f(y).}$$

Отображение f называют *строго возрастающим*, если, сверх того,

$$\boxed{x < y} \Rightarrow \boxed{f(x) < f(y),}$$

и *строго убывающим*, если

$$\boxed{x < y} \Rightarrow \boxed{f(x) > f(y).}$$

Возрастающие и убывающие отображения называются вместе *монотонными*. Строго возрастающие и строго убывающие отображения называются вместе *строго монотонными*.

Примеры.

1°. Последовательность (x_n), где

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

является строго возрастающей. В этом легко убедиться, если разложить правую часть по формуле бинома ([5], с. 99).

2°. Функция $x \to e^{-x}$ вещественного переменного является строго убывающей.

4. Мощности.

Определение 20. Множество X называется *равномощным* множеству Y, если существует биекция множества X на Y.

Если существует инъекция множества X в Y и не существует инъекции множества Y в X, то говорят, что Y имеет *мощность, строго большую мощности* множества X, или что X имеет *мощность, строго меньшую мощности* множества Y.

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2 [*Теорема Бернштейна.*] *Для любых двух множеств X и Y*

(1) *либо существует инъекция множества X в Y, либо существует инъекция множества Y в X (одно не исключает другое);*

(2) *если существуют одновременно инъекция множества X в Y и инъекция множества Y в X, то существует также биекция множества X на Y.*

Эту теорему называют *теоремой сравнения мощностей.* Из нее следует, что любые два множества X и Y либо равномощны, либо одно из них имеет мощность, строго большую мощности другого.

Предложение 4. Бинарное отношение "X равномощно Y" является отношением эквивалентности $\sim$: $X \sim Y$.

Доказательство. Действительно, для произвольного множества X тождественное отображение id_X будет биекцией множества X на себя. Следовательно,

$$X \sim X$$

(рефлексивность).

Далее, если существует биекция f множества X на Y, то f^{-1} будет биекцией множества Y на X, т. е.

$$\boxed{(X \sim Y) \Rightarrow (\mathrm{Y} \sim X)}$$

(симметричность).

Наконец, если существует биекция f множества X на Y и биекция g множества Y на Z, то композиция $g \circ f$ будет биекцией множества X на Z, т. е.

$$\boxed{((X \sim Y) \wedge (Y \sim Z)) \Rightarrow (X \sim Z)}$$

(транзитивность), ч. и т. д.

Рассмотренное отношение эквивалентности делит все множества на классы эквивалентности, называемые *мощностями* или *кардинальными числами*. Мощность множества X обозначается символом $\mathrm{card}X$:

$$\boxed{\text{card X – мощность множества } X.}$$

Таким образом, каждому множеству X ставится в соответствие объект card X, называемый кардинальным числом или мощностью X, причем двум множествам X и Y сопоставляется одно и то же кардинальное число тогда и только тогда, когда X равномощно Y, т. е. когда X биективно Y.

Конечные кардинальные числа являются классами эквивалентности конечных множеств. Мощность бесконечного множества (бесконечное кардинальное число) называется *трансфинитным кардинальным числом* или *трансфинитным числом*.

Определим в множестве кардинальных чисел бинарное отношение:

$$\text{если } A \subset E, \text{ то card } A \leq \text{card } E. \tag{4}$$

Это отношение рефлексивно, так как $(A \subset A) \Rightarrow (\text{card } A \leq \text{card } A)$, и транзитивно, ибо если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ и, следовательно, card $A \leq$ card C.

Покажем, что отношение (4) антисимметрично, т. е.

$$((\text{card } A \leq \text{card } B) \wedge (\text{card } B \leq \text{card } A)) \Rightarrow$$

$$(\text{card } A = \text{card } B).$$

Пусть $E \subset F$. Назовем инъекцию f множества E в F, определенную равенством $f(x) = x$, *канонической инъекцией* множества E в F. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то одновременно существуют каноническая инъекция множества A в B и каноническая инъекция множества B в A. Тогда по теореме Бернштейна существует биекция множества A на B и, следовательно, множества A и B равномощны, т. е. card $A =$ card B.

Мы доказали, что *бинарное отношение* (4) рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, поэтому оно *является отношением порядка.*

5. Счетные множества.

Определение 21. Всякое множество, равномощное множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел, называется *счетным.* Мощность ν счетного множества – это мощность множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел: $\nu \equiv \text{card } \mathbf{N}$.

Множество E *конечно*, если оно равномощно множеству n натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. Всякое множество E, не являющееся конечным, будем называть *бесконечным множеством.*

Множество E называется *несчетным*, если оно не конечно и не счетно. Если множество E конечно или счетно, будем говорить, что E *не более чем счетно.*

Пример. Множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел счетно. Действительно, расположим элементы множеств $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{N}$ в следующем порядке:

N	1	2	3	4	5	6	7	...
Z	0	1	-1	2	-2	3	-3	...

Теперь видно, что функция, определенная формулой

$$\mathbf{N} \to \mathbf{Z} : n \to f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно}, \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно}, \end{cases}$$

является биекцией множества $\mathbf{N}$ на $\mathbf{Z}$.

В этом примере часть $\mathbf{N}$ множества $\mathbf{Z}$ оказывается равномощной всему множеству $\mathbf{Z}$. Это возможно только для бесконечных множеств. Конечное множество E не может быть равномощно никакому своему подмножеству, отличному от E.

Теорема 3 $\nu \equiv \mathit{card}\, \mathbf{N}$ *является наименьшим трансфинитным кардинальным числом.*

Доказательство. Пусть E – бесконечное множество, для которого соотношение $\operatorname{card} E > \operatorname{card} \mathbf{N}$ не имеет места. Тогда по теореме Бернштейна существует инъекция множества E в $\mathbf{N}$ и, следовательно, биекция $g : E \to P$ множества E на некоторую бесконечную часть $P \subset \mathbf{N}$. Расположим элементы множества P в порядке возрастания и обозначим n-й элемент полученной таким образом последовательности через x_n. Отображение $f : \mathbf{N} \to P : n \to x_n$ будет биекцией множества $\mathbf{N}$ на P, а композиция $g \circ f : \mathbf{N} \to E$ – биекцией множества $\mathbf{N}$ на E. Следовательно, $\operatorname{card} E = \operatorname{card} \mathbf{N}$, ч. и т. д.

Теорема показывает, что всякое бесконечное множество обязательно содержит счетное подмножество. В частности, всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно, и никакое непустое несчетное множество не может быть частью счетного.

Теорема 4 *Если* (A_n) *– последовательность счетных множеств, то объединение*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{5}$$

счетно.

Доказательство. Учитывая, что каждое счетное множество A_k биективно $\mathbf{N}$, расположим элементы множества A_k в последовательность (x_{kn}) и составим бесконечную таблицу, содержащую все элементы множества E (рис. 21). Если перенумеровать эти элементы в порядке, указанном на рис. 21 стрелками:

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \ldots,$$

то получится последовательность, определяющая биекцию множества $\mathbf{N}$ на E. Следовательно, $\operatorname{card} E = \nu$ и E счетно, ч. и т. д.

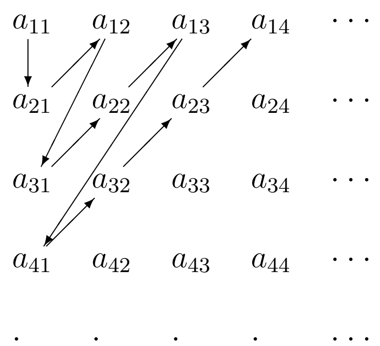

Рис. 21.

Следствие 1. Если I не более чем счетно и множество B_i при каждом $i \in I$ не более чем счетно, то объединение

$$F = \bigcup_{i \in I} B_i$$

не более чем счетно.

Действительно, F равномощно некоторому подмножеству множества (5).

Теорема 5 *Если X – счетное множество, то произведение X^n также является счетным множеством.*

Доказательство. Для $n = 1$ теорема очевидна. Пусть она верна для $k = n - 1$, т. е. X^{n-1} счетно. Представим элементы произведения X^n в виде

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \equiv (a, b),$$

где $a \in X^{n-1},\ b \in X$. При каждом фиксированном a множество всех пар (a, b) равномощно множеству X и, следовательно, счетно. Таким образом, X^n является объединением счетного множества счетных множеств и по предыдущей теореме будет счетным, ч. и т. д.

Следствие 2. Множество всех рациональных чисел счетно.

В самом деле, каждое рациональное число $r = p/q$ ($q \neq 0$) определяется парой $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Так как по теореме 5 произведение $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ счетно, то множество рациональных чисел $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ не более чем счетно. Но $\mathbf{Q}$ содержит $\mathbf{N}$, поэтому $\mathbf{Q}$ счетно.

Следствие 3. Множество всех точек $\mathbf{R}^n$ с рациональными координатами счетно, ибо $\mathbf{Q}^n$ счетно.

Теорема 6 [*Теорема Кантора.*][6] *Множество всех вещественных чисел несчетно:*

$$\boxed{\mathrm{card}\ \mathbf{N} < \mathrm{card}\ \mathbf{R}.}$$

6. Мощность континуума.

Определение 22. Мощность интервала $(0, 1) \subset \mathbf{R}$ называется *мощностью континуума.*

Справедливы следующие утверждения.

[6]Доказательство теоремы см., например, в книге В. А. Зорича [6, гл. 2, §4, п. 2].

1. Множество $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел имеет мощность континуума, ибо функция

$$x \to \ln \frac{x}{1-x}$$

является биекцией интервала $(0,1)$ на $\mathbf{R}$.

2. Множества $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2, \ldots, \mathbf{R}^n$ имеют мощность континуума и, следовательно, равномощны друг другу.

3. Множество $\mathbf{C}$ всех комплексных чисел имеет мощность континуума, ибо оно равномощно $\mathbf{R}^2$.

4. Любое векторное пространство конечного числа измерений n над полем вещественных (или комплексных) чисел имеет мощность континуума, ибо оно равномощно $\mathbf{R}^n$ (или $\mathbf{R}^{2n}$).

5. Множество всех непрерывных вещественных функций вещественной переменной имеет мощность континуума.

6. Множество всех вещественных функций вещественного переменного имеет мощность, строго большую мощности континуума.

Континуум–гипотезой называется предположение, согласно которому не существует множеств E таких, что $\nu = \mathrm{card}\,\mathbf{N} < \mathrm{card}\,E < \mathrm{card}\,\mathbf{R}$, т. е. вслед за кардинальным числом ν идет сразу кардинальное число $\mathrm{card}\,\mathbf{R}$, между ними нет промежуточных кардинальных чисел.

Коэн доказал *неразрешимость* континуум-гипотезы, показав, что ее истинность или ложность не могут быть установлены в рамках существующей аксиоматики теории множеств, что заставляет "критически взглянуть" на основания современной "канторовской" математики, оперирующей бесконечными процессами [7].

Литература

[1] Шварц Л. Анализ, т. 1. – М., 1972.

[2] Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ. – М., 1974.

[3] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. – М., 1964.

[4] Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. – М., 1956.

[5] Рудин У. Основы математического анализа. – М., 1976.

[6] Зорич В. А. Математический анализ. Ч. I. – М., 1981.

[7] Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум–гипотеза. – М., 1969.