

Числа в первой строке обозначить x_1, x_2, \dots, x_{10} , Во второй строке обозначить y_1, y_2, \dots, y_{10} ,

На самом деле все двадцать чисел моделируются как нормальные числа с одними и теми же параметрами

Задания.

- 1) Вычислить эмпирические средние и дисперсию x -ов и y -ов,
- 2) Указать для среднего и дисперсии несмещенные оценки.
- 3) Построить график эмпирической функции распределения для x -ов.
- 4) Построить доверительные интервалы для среднего (симметричный) и дисперсии (вида $(0, \varepsilon)$) x -ов и y -ов с доверительным уровнем 0.9.
- 5) Вычислить коэффициент корреляции между x -ми и y -ми с одинаковыми номерами (мы рассматриваем векторные данные $(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$). Проверить гипотезу независимости x -ов и y -ов с уровнем значимости 0.1 и 0.096.
- 6) С помощью критерия Стьюдента проверить с уровнем значимости 0.1 гипотезу равенства средних x -ов и y -ов при альтернативной гипотезе “среднее x -ов больше среднего y -ов”.
- 7) Создать единую выборку из 20 данных, переписав подряд сначала все x_i , потом все y_i , подсчитать коэффициент d и коэффициент асимметрии g и проверить на нормальность двумя способами с уровнями значимости 0.1 и 0.02).
- 8) Подсчитать ранговый коэффициент корреляции Спирмена, сравнить с обычным коэффициентом корреляции. Проверить с помощью рангового коэффициента гипотезу независимости x -ов и y -ов с уровнем значимости 0.096.

Объяснить все, что делается, своими словами.

Все приведенные ниже таблицы взяты из таблиц Большева и Смирнова в предположении нормальности выборки из 20 данных.

Таблица $\mathbf{P}\{d \geq d_0\} = p_0$, где числа d_0 , для которых соответствующая вероятность равна p_0 указаны в таблице, а вероятности указаны сверху, сбоку указаны числа $n = 16, 21$, а у вас $n = 20$, значит нужна интерполяция. Уровень значимости критерия вы сделайте равным 0.02 и 0.10. $d = \frac{\sum_i |x_i - \bar{x}|}{n \cdot s}$, где s^2 — эмпирическая дисперсия.

Таблица для выборочного коэффициента асимметрии $g = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^3}{n \cdot s^3}$.

В таблице для соответствующего значения вероятности p_0 и числа наблюдений n указаны g_0 , для которых $\mathbf{P}\{g \geq g_0\} = p_0$. Используя симмет-

ричность распределения асимметрии, можно построить критерии с уровнями значимости 0.1 и 0.02 для $n = 25, 30, 35$. К сожалению, в таблице нет значений g_0 для $n = 20$, поэтому нужно провести экстраполяцию (лучше говорить экстраполяция, а не интерполяция, так как 20 выходит за рамки данных таблицы) с помощью полинома второго порядка.

Подробнее все это написано ниже в соответствующей таблице.

ТАБЛИЦЫ ВЕРОЯТНОСТЕЙ [1]

1. Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. Таблицы математической статистики.
М. Наука, 1983.

**Таблица 1. Функция распределения Φ
стандартного нормального распределения:**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Горизонтальная часть таблицы указывает сотые доли x . Значения Φ умножены на 10^4 .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	5040	5080	5120	5160	5200	5239	5279	5319	5359
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	6179	6217	6256	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	8413	8437	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	864	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8831
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9255	9279	9292	9306	9319
1.5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9705
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.1	9821	9825	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9915
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990

Таблица 2. $(1 - p)$ -квантиль q распределения χ^2 :
 $\mathbb{P}\{\chi_n^2 > q\} = p.$

$n \backslash p$	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01
2	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086
6	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.336	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566

$n \backslash p$	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01
21	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.688	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892
31	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191
32	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486
33	17.073	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776
34	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061
35	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342
36	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619
37	19.960	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668	59.892
38	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.895	61.162
39	21.426	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120	62.428
40	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691

Таблица 3. $(1 - p)$ -квантиль q распределения Стьюдента случайной величины t_n : $\mathbb{P}\{t_n > q\} = p$.

$n \setminus p$	0.05	0.025	0.01
1	6.3138	12.7062	31.8205
2	2.9200	4.3027	6.9646
3	3534	3.1824	4.5407
4	1318	2.7764	3.7469
5	0150	5706	3649
6	1.9432	2.4469	3.1427
7	8946	3646	2.9980
8	8595	3060	8965
9	8331	2622	8214
10	8125	2281	7638
11	1.7959	2.2010	2.7181
12	7823	1788	6810
13	7709	1604	6503
14	7613	1448	6245
15	7530	1314	6025
16	1.7459	2.1199	2.5835
17	7396	1098	5669
18	7341	1009	5524
19	7291	0930	5395
20	7247	0860	5280
21	1.7207	2.0796	2.5176
22	7171	0739	5083
23	7139	0687	4999
24	7109	0639	4922
25	7081	0595	4851
26	7056	0555	4786
27	1.7033	2.0518	2.4727

$n \setminus p$	0.05	0.025	0.01
28	1.7011	2.0484	2.4671
29	6991	0452	4620
30	6973	0423	4573
32	6939	0369	4487
34	6909	0322	4411
36	6883	0281	4345
38	6860	0244	4286
40	6839	0211	4233
42	1.6820	2.0181	2.4185
44	6802	0154	4141
46	6787	0129	4102
48	6772	0106	4066
50	6759	0086	4033
55	2.6730	2.0040	2.3961
60	6706	0003	3901
65	6686	1.9971	3851
70	6669	9944	3808
80	6641	9901	3739
90	6620	9867	3685
100	1.6602	1.9840	2.3642
120	6577	9799	3578
150	6551	9759	3515
200	6525	9719	3451
250	1.6510	1.9695	2.3414
300	6499	9679	3388
400	6487	9659	3357
500	1.6479	1.9647	2.3338

Таблица 4. 0.95-квантиль q распределения Фишера случайной величины

$$F_{m,n} = \frac{n\chi_m^2}{m\chi_n^2}, \mathbb{P}\{F_{m,n} > q\} = 0.05.$$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.5	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.39	19.40
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.014	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.410	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.773	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	4.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.501	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.257	3.866	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.709	3.478	3.326	3.217	3.136	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.791	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494

Таблицы, используемые при проверке выборки на нормальность

В следующих таблицах для выборки (x_1, \dots, x_n) используются стандартные обозначения:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Таблица 5. $(1 - p)$ -квантиль q распределения выборочной характеристики эксцесса в нормальной модели с выборкой (x_1, \dots, x_n)

Экссесс обозначается в [30] $b_2 - 3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{s^4} - 3$.

Число в таблице q определяется равенством $\mathbb{P}\{b_2 - 3 > q\} = p$.

$n \setminus p$	0.01	0.05	0.95	0.99
50	1.92	1.01	-0.87	-1.05
100	1.40	0.77	-0.65	-0.82
150	1.14	0.66	-0.55	-0.70
200	0.98	0.57	-0.49	-0.63
250	0.87	0.51	-0.45	-0.58

Таблица 6. $(1 - p)$ -квантиль q распределения выборочной характеристики асимметрии g_1 в нормальной модели с выборкой (x_1, \dots, x_n)

Асимметрия обозначается в [30] $g_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$.

Число в таблице q определяется равенством $\mathbb{P}\{g_1 > q\} = p$.

$n \setminus p$	0.05	0.01	$\sqrt{\mathbb{D}g_1}$
25	0.711	1.061	0.4354
30	0.661	0.982	0.4052
35	0.621	0.921	0.3804
40	0.587	0.869	0.3596
45	0.558	0.825	0.3418
50	0.533	9,787	0.3264
60	9.492	0.723	0.3009
70	0.459	0.673	0.2806
80	0.432	0.631	0.2638
90	0.409	0.596	0.2498
100	0.389	0.567	0.2377

Таблица 7. $(1 - p)$ -квантиль q распределения выборочной характеристики d в нормальной модели

с выборкой (x_1, \dots, x_n)

$$d = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{s}.$$

Число в таблице q определяется равенством $\mathbb{P}\{d > q\} = p$.

$n \setminus p$	0.01	0.05	0.1	0.9	0.95	0.99	$\sqrt{\mathbb{D}d}$
11	0.9359	0.9073	0.8899	0.7409	0.7153	0.6675	0.05784
16	9137	8884	8733	7452	7236	6829	0.04976
21	9001	8768	8631	7495	7304	6950	0.04419
26	8901	8686	8570	7530	7360	7040	0.04011
31	8827	8625	8511	7559	7404	7110	0.03697
36	8769	8578	8468	7583	7440	7167	0.03447
41	8722	8540	8436	7604	7470	7216	0.03241
46	8682	8508	8409	7621	7496	7256	0.03068
51	8648	8481	8385	7636	7518	7291	0.02919
61	0.8592	0.8434	0.8349	0.7662	0.7554	0.7347	0.02678
71	8549	8403	8321	7683	7583	7393	0.02487
81	8515	8376	8298	7700	7607	7430	0.02332
91	8484	8353	8279	7714	7626	7460	0.02203
101	8460	8344	8264	7726	7644	7487	0.02094

Примечание. Для таблиц 6 и 7 для n , отличных от использованных в таблице, в [1] предлагается использовать линейную интерполяцию или экстраполяцию. Причем интерполяция или экстраполяция должны проводиться не по аргументу n , а по аргументу $\sqrt{\mathbb{D}g_1}$ в таблице 6 и по аргументу $\sqrt{\mathbb{D}d}$ в таблице 7. Там же приведены формулы для дисперсий:

$$\mathbb{D}g_1 = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

$$Dd = \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \left[\sqrt{n(n-2)} + \arcsin \frac{1}{n-1} \right] \right\} - \frac{n-1}{\pi} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right]^2.$$

Таблица 8. Функция распределения рангового коэффициента корреляции Спирмена ρ

В таблице для каждого числа наблюдений n указаны вероятности $p(n) = \mathbb{P}\{\rho \leq r(n)\}$, где числа $r(n)$ пробегает значения (не все), которые для данного n может принимать ρ .

$r(6)$	$p(6)$	$r(7)$	$p(7)$	$r(8)$	$p(8)$	$r(9)$	$p(9)$	$r(10)$	$p(10)$
$-\frac{90}{210}$	0.210	$-\frac{116}{336}$	0.249	$-\frac{144}{504}$	0.250	$-\frac{216}{720}$	0.218	$-\frac{258}{990}$	0.235
$-\frac{102}{210}$	0.178	$-\frac{128}{336}$	0.198	$-\frac{180}{504}$	0.195	$-\frac{264}{720}$	0.168	$-\frac{318}{990}$	0.184
$-\frac{114}{210}$	0.149	$-\frac{140}{336}$	0.151	$-\frac{216}{504}$	0.150	$-\frac{312}{720}$	0.125	$-\frac{378}{990}$	0.139
$-\frac{126}{210}$	0.121	$-\frac{152}{336}$	0.118	$-\frac{252}{504}$	0.108	$-\frac{360}{720}$	0.089	$-\frac{438}{990}$	0.102
$-\frac{138}{210}$	0.088	$-\frac{164}{336}$	0.083	$-\frac{288}{504}$	0.076	$-\frac{408}{720}$	0.060	$-\frac{498}{990}$	0.072
$-\frac{150}{210}$	0.068	$-\frac{176}{336}$	0.055	$-\frac{324}{504}$	0.048	$-\frac{456}{720}$	0.038	$-\frac{558}{990}$	0.048
$-\frac{162}{210}$	0.051	$-\frac{188}{336}$	0.033	$-\frac{360}{504}$	0.029	$-\frac{504}{720}$	0.022	$-\frac{618}{990}$	0.030
$-\frac{174}{210}$	0.029	$-\frac{200}{336}$	0.017	$-\frac{396}{504}$	0.014	$-\frac{552}{720}$	0.011	$-\frac{678}{990}$	0.017
$-\frac{186}{210}$	0.017	$-\frac{212}{336}$	0.0062	$-\frac{432}{504}$	0.0054	$-\frac{600}{720}$	0.0041	$-\frac{738}{990}$	0.0087
$-\frac{198}{210}$	0.0083	$-\frac{224}{336}$	0.0014	$-\frac{468}{504}$	0.0011	$-\frac{648}{720}$	0.0010	$-\frac{798}{990}$	0.0036